MATEMÁTICA
CURSO DE NIVELACIÓN

DR. OCTAVIO MILONI

PROFESOR TITULAR – CÁTEDRA DE INGRESO

FACULTAD DE INGENIERÍA – UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PROFESOR ADJUNTO – MATEMÁTICAS AVANZADAS

FACULTAD DE CS. ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS – UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CTA. CFICA. VIVIANA GIANDINI

PROFESORA ADJUNTA – CÁTEDRA DE INGRESO – FACULTAD DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA – UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

MG. ÁNGELA MALDONADO

PROFESORA ADJUNTA – CÁTEDRA DE INGRESO

FACULTAD DE INGENIERÍA – UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PROFESORA ADJUNTA – MATEMATICA A

FACULTAD DE INGENIERÍA – UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

REVISORES 2016

ESP. ROSSANA DI DOMENICANTONIO

PROFESORA TITULAR SUPLENTE – CÁTEDRA DE INGRESO – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

PROFESORA ADJUNTA – MATEMATICA A y B – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

LIC. ANA RIVERA

PROFESORA – CURSO DE NIVELACION PRESENCIAL – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

JEFE DE TRABAJOS PRACTICOS – MATEMATICA A y B – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

ING. TATIANA ARTURI

PROFESORA – CURSO DE NIVELACION PRESENCIAL – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

JEFE DE TRABAJOS PRACTICOS – QUIMICA – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

AYUDANTE DIPLOMADO – DTO. ING. QUIMICA – FACULTAD DE INGENIERÍA – UNLP

Prólogo

La Facultad de Ingeniería, el Área Académica y la Cátedra de Ingreso te dan la bienvenida a la Universidad Nacional de La Plata.

El *Curso de Nivelación* es el primer trayecto curricular en el cual proponemos un curso de Matemática con contenidos de la Escuela Media.

Este curso tiene como objetivo principal repasar, consolidar y aportar algunas visiones y abordajes de lo visto en matemática en la Escuela Secundaria desde una perspectiva que introduzca una visión de la matemática y sus problemas similar a las que surgen en las materias de matemática de las carreras de Ingeniería.

Con la intensidad del *Curso de Nivelación* -en tanto horas de cursada, de trabajo y de estudio- buscamos establecer un ritmo de estudio acorde al que las carreras de Ingeniería requieren para un desempeño exitoso.

Las nuevas metodologías de la enseñanza implementadas en nuestra Facultad, principalmente en las Matemáticas, se basan en el *principio del trabajo colaborativo*. Este principio establece que el trabajo en grupos enriquece el proceso de aprendizaje, aporta las visiones particulares de cada estudiante en el grupo de estudio de manera tal que la construcción del conocimiento no provenga exclusivamente del pizarrón, sino que en las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante está la clave para la consolidación de las ideas y de los conceptos.

Es por esto que fomentamos la conformación de grupos de estudio, tanto en el aula como fuera de ella, ya que en tus compañeros de estudio encontrarás el apoyo y la confianza para avanzar con firmeza en la carrera. Serán tus compañeros quienes celebrarán tus éxitos y quienes te apoyen en momentos de dificultad.

Este material será la base que organice la exposición de los temas y los trabajos prácticos que desarrollaremos durante el curso. Recomendamos las consultas con materiales complementarios a fin de enriquecer las visiones sobre los temas y conformar una visión propia. Esta recomendación no es exclusiva para este curso, sino para todas las materias de la carrera, ya que visiones y abordajes diferentes pueden ser de ayuda para tu propia construcción del conocimiento.

El formato del material está pensado para que te apropies de él. En los márgenes laterales de cada página encontrarás comentarios, observaciones y

ejemplos que complementan la exposición. Los símbolos elegidos para las notas al margen son:
$\bigstar$: Este símbolo indica **¡ATENCIÓN!** Lee detenidamente y reflexiona sobre lo escrito. Consulta y discute con compañeros y docentes.
$\blacktriangle$: Este símbolo es usado para comentarios. Complementa la exposición y busca la ampliación de mirada del tema en estudio.
$\diamondsuit$: Este símbolo tiene varias funciones. Presenta ejercicios, reflexiones contextuales, ejemplos, etc.

Encontrarás además ejercicios y ejemplos. Estos espacios laterales pueden servirte para tus propios comentarios, reflexiones, etc. Aprovéchalos.

Finalmente, queremos desearte el mayor de los éxitos en la carrera que hayas elegido. Y decirte que La *Cátedra de Ingreso*, la Secretaría Académica, Vicedecanato y Decanato de la Facultad de Ingeniería siempre estarán dispuestos para atender tus inquietudes.

Octavio Miloni, Viviana Giandini y Ángela Maldonado
Noviembre de 2014

Contents

Part I

Conjuntos Numéricos y Operaciones

Introducción

Este capítulo está dedicado a una revisión de las operaciones en el conjunto de los números reales.

Para que el desarrollo -y la lectura- sea, de alguna manera, secuencial, haremos una revisión de cada conjunto numérico y las operaciones definidas en el mismo.

El estudiar conjuntos numéricos nos impone la necesidad de revisar mínimamente la noción de *conjunto*, junto con algunas relaciones entre ellos. Para esta revisión, nos basta con repasar conceptos tales como *pertenencia a un conjunto*; *inclusión de un conjunto en otro*, *unión de conjuntos*, *intersección de conjuntos*. Estudiar más relaciones y operaciones entre conjuntos hace a un curso sobre conjuntos, que no es el objetivo de este capítulo. Daremos en este capítulo apenas las relaciones entre conjuntos necesarias para dar un contexto a nuestro abordaje sobre números.

Asimismo, haremos una revisión de los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales junto con las operaciones y las propiedades más relevantes.

Finalmente -y es un objetivo importante de este capítulo- nos abocaremos a la simbolización matemática de determinados enunciados de manera tal de empezar a recorrer un camino que será habitual durante toda la carrera: la cualificación y cuantificación de fenómenos en observación.

Conjuntos

Ideas, Conceptos y Definiciones

La idea de conjunto es muy intuitiva y en su definición más primaria podemos afirmar que

> Un conjunto es una colección de objetos que llamaremos *elementos*

Vamos a usar letras mayúsculas para denotar conjuntos y letras minúsculas para denotar elementos. Así, A es un conjunto y x un elemento.

La definición de conjunto no hace ningún tipo de alusión con respecto a los elementos del conjunto. En particular, no determina si el conjunto tiene una cantidad finita de elementos, infinita, si los elementos guardan alguna relación entre sí (es decir, si son clasificables), etc.

Notación de Conjuntos

A los conjuntos los denotaremos entre llaves, así, por ejemplo, el conjunto

$$A = \{1, 2, \square, \triangle, \pi\}$$

es un conjunto cuyos elementos parecen no guardar relación alguna.

En cambio, el conjunto

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

es el conjunto de números naturales pares.

Cuando los elementos que componen un conjunto guardan una cierta relación entre sí, podremos describir a un conjunto por *comprensión*. De esta manera, el conjunto $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$ puede ser descripto como

$$B = \{x,\ tal\ que\ x\ es\ un\,natural\ \ par\}$$

Cuando un conjunto está dado por la totalidad de sus elementos, se dice que el conjunto está definido por *extensión*.

Cuando lo que define al conjunto es la cualidad de sus elementos decimos que el conjunto está definido por *comprensión*.

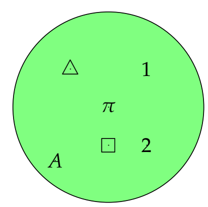


Diagrama de Venn del conjunto A.

▲ **Observación.** El conjunto A es finito y el conjunto B, infinito.

En lo que sigue veremos relaciones entre elementos y conjuntos y entre conjuntos. Es necesario que nos vayamos familiarizando con la notación conjustista, ya que toda la matemática moderna está basada en estas ideas.

Aplica lo aprendido. Escribir por comprensión los siguientes conjuntos:
a) $A = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$
b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

Pertenencia e Inclusión

Cuando un elemento x cualesquiera está dentro de un conjunto A decimos que *x pertenece a A* y lo denotamos

$$x \in A$$

Cuando dados dos conjuntos, A y B en el que todos los elementos de A están también en B decimos que *A está incluído en B* y se denota

▲ **Observación.** El signo "∈" está reservado para relacionar elementos con conjuntos, mientras que el signo "⊂" está reservado para relacionar dos conjuntos.

$$A \subset B$$

En términos simbólicos, decimos

$$\boxed{A \subset B \quad \textit{si y solo si } x \in A \to x \in B}$$

Como los conjuntos pueden contener elementos de naturaleza arbitraria, nada impide que un conjunto tenga por elementos a otro conjuntos. Veamos el ejemplo siguiente. Sea B el conjunto

$$B = \{\,\{1, 2\}; \{a, b, c\}; 1; 2\}$$

Notemos que algunas relaciones de pertenencia e inclusión son:

- $1 \in B$,
- $2 \in B$,
- $\{1, 2\} \in B$,
- $\{1, 2\} \subset B$,
- $a, b, c \notin B$
- $\{a, b, c\} \in B$

Denotamos como $\varnothing$ al conjunto que no tiene elemenos. Y lo denominamos *vacío*.

Unión e Intersección de Conjuntos

La unión e intersección entre conjunto son operaciones: Esto significa que a cada par de conjuntos, A y B *unir* A con B da como resultado un nuevo conjunto que se obtiene a partir de ambos. Lo mismo ocurre con la intersección.

Unión

Dados dos conjuntos, A y B definimos como unión de A y B al conjunto denotado por $A \cup B$ y es el conjunto formado por todos los elementos de A y los elementos de B, sin repeticiones.

Claro que existe una manera más formal de escribirla, pero escribámosla después de un ejemplo.

Consideremos $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,5,7\}$. Entonces

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$$

notemos que el 3 que pertenece a los dos conjuntos no lo repetimos.

Esto significa que los elementos que componen $A \cup B$ son aquellos que están en A o están en B.

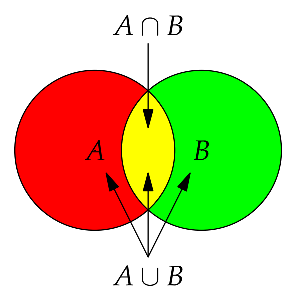
La definición es, entonces,

$$\boxed{x \in A \cup B \quad \longleftrightarrow \quad x \in A \text{ o } x \in B}$$

Intersección

La intersección de dos conjuntos es el conjunto que obtiene con los elementos que son comunes a ambos conjuntos. Esto es, si A y B son conjuntos, la intersección entre A y B, la denotamos $A \cap B$ y se define a través de

$$\boxed{x \in A \cap B \quad \longleftrightarrow \quad x \in A \text{ y } x \in B}$$



El diagrama de Venn mostrado en la figura ilustra la unión e intersección de dos conjuntos.

En lo que sigue nos abocaremos a estudiar conjuntos numéricos, es decir, conjuntos cuyos elementos son números.

Números Naturales

Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ dado por extensión

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$$

No entraremos en detalles sobre el origen de este conjunto, sólo podremos decir que es el primer conjunto numérico con el que la humanidad comenzó a contar. El cero (la nada) es un concepto posterior, pero para nuestro análisis incorporamos el cero al conjunto.

La secuencia para encontrar cada número natural es sumar uno al anterior, y así se construye la secuencia de los números naturales. Este conjunto también es denominado como el de los *enteros positivos*.

Nuestro enfoque de los conjuntos numéricos será el que analice la *estructura* del mismo, esto es, como se comporta el conjunto en función de las operaciones que podamos definir en el.

Operaciones en $\mathbb{N}$

En general, hablar de operaciones en un determinado conjunto es establecer una regla a partir de la cual a cada par de elementos del conjunto se le asigna otro, del mismo conjunto. Es importante que el resultado de la operación esté en el mismo conjunto, sino no tendríamos como representar el resultado.

En este sentido, se dice que la *operación satisface la llamada Ley de Cierre*.

No es necesario buscar ejemplos muy complicados para encontrar conjuntos y una operación donde no se satisfaga la ley de cierre. Consideremos por ejemplo el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Definamos como operación en este conjunto la suma usual. Podemos notar que

$$2 + 3 = 5 \notin A$$

Simbolización Matemática

Cuando queremos estudiar propiedades generales de los conjuntos, es necesario salir de lo particular para dar paso a un análisis general. Esto significa que debemos superar la instancia del ejemplo concreto para poder representar en un símbolo una cantidad que *a priori* es cualquiera. Es por esto que deberemos asignar letras a las cantidades a estudiar, sino correríamos el riesgo de creer que se satisface una determinada propiedad porque en un ejemplo se satisfizo.

Notemos que $2^2 = 4 = 2 + 2$. Esto es una propiedad? Si fuera una propiedad general, deberíamos tener $3^3 = 3 + 3$ lo cual es claramente falso, ya que el miembro izquierdo es 27 y el otro 6.

La validez de un razonamiento que involucre propiedades de los números dependerá de la generalidad del análisis.

En general, cuando necesitamos trabajar con un número cualesquiera, decimos: Sea $n \in \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es un determinado conjunto numérico.

Suma en $\mathbb{N}$

Sin necesidad de definir la suma, puesto que es una operación a la que estamos habituados, vamos a puntualizar y reflexionar sobre cuáles son las propiedades que satisface. Estas propiedades las consideraremos axiomas, es decir, que no precisan demostración.

1. Ley de Cierre

Esta propiedad es fundamental y ya hablamos brevemente sobre ella. Sin embargo, podemos simbolizarla de la siguiente manera:

$$Si\ a, b \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a + b \in \mathbb{N}$$

2. Asociatividad

Esta propiedad es la que nos permite sumar más de dos números y establece que no importa como hagamos las sumas parciales

$$Si\ a, b, c \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Conmutatividad

Esta propiedad es la que establece que el orden de los sumandos no altera el resultado

$$Si\ a, b \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a + b = b + a$$

4. Existencia de un neutro

Notemos que si a un número cualesquiera le sumamos el cero, el resultado vuelve a ser el número original. Estamos en presencia del neutro para la suma.

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a + 0 = a$$

Observemos que la suma de números naturales siempre da como resultado un número que es mayor o igual que cada uno de los sumandos, esto es siempre adiciona. En caso de la igualdad se da cuando se suma el neutro, es decir, el cero.

Observemos que no es posible efectuar resta entre dos números naturales cualesquiera, ya que podemos econtrarnos con que el resultado no pertenezca al conjunto de los naturales.

Si $a, b \in \mathbb{N}$ $a - b$ sólo es posible de hacerse si a es mayor o igual que b, puesto que si no, no tenemos cómo representar el resultado en el conjunto de los naturales.

Esta imposibilidad está asociada a la no existencia de un opuesto para la suma. Esta situación es salvada al definir los enteros negativos.

Consideremos ahora la operación producto.

Producto en $\mathbb{N}$

El producto de números naturales surge de sumar un mismo número una cierta cantidad de veces. Así, por ejemplo, si sumamos un determinado número natural a un número n veces, tenemos

$$\underbrace{a+a+\cdots+a+a}_{n\ veces\ a} = n \cdot a$$

1. Ley de Cierre

Esta propiedad es fundamental y ya hablamos brevemente sobre ella. Sin embargo, podemos simbolizarla de la siguiente manera:

$$Si\ a,b \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a \cdot b \in \mathbb{N}$$

2. Asociatividad

Esta propiedad es la que nos permite multiplicar más de dos números y establece que no importa cómo hagamos los productos parciales

$$Si\ a,b,c \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Conmutatividad

Esta propiedad es la que establece que *"el orden de los factores no altera el producto*

$$Si\ a,b \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a \cdot b = b \cdot a$$

▲ **Observación.** La conmutatividad del producto no es la regla general. Hay muchos conjuntos donde hay definidos productos y éstos no son conmutativos.

4. Existencia de un neutro

Notemos que si a un número cualesquiera lo multiplicamos por uno, el resultado vuelve a ser el número original. Estamos en presencia del neutro para el producto.

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a \cdot 1 = a$$

La Propiedad Distributiva

La propiedad distributiva del producto con respecto a la suma es la propiedad que vincula las dos operaciones, y establece que

$$Si\ a,b,c \in \mathbb{N},\ entonces,\ \ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esta propiedad es la que establece una prioridad del producto con respecto a la suma. Es decir, si nos encontramos con la expresión

$$2 + 3 \cdot b$$

primero hay que realizar el producto y luego sumar.

Algunos subconjuntos de N

Números Pares

De entre los subconjuntos posibles del conjunto de los naturales nos encontramos con los números pares.

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Si tuviéramos que definir al conjunto por comprensión, es decir, decir la cualidad que caracteriza a los números pares diríamos que son los múltiplos de 2.

Y cómo definiríamos a los múltiplos de 2?

Simple,

Diremos que un número natural a es múltiplo de 2. Es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a = 2 \cdot k$$

A partir de esta simple definición, podríamos preguntarnos, ¿Qué ocurre si sumamos dos números pares? Será par?

Este simple problema nos impone la necesidad de simbolizar matemáticamente.

Para comenzar, consideremos dos números pares, a y b. Como ambos son pares, podemos escribir

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot k \quad k \in \mathbb{N} \\ b &= 2 \cdot m \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

si sumamos a con b tenemos,

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \cdot k + 2 \cdot m \\ &= 2 \cdot (k + m) \end{aligned}$$

aquí detengámonos un instante para reflexionar. Si k y m son enteros, y además están sumados, por la Ley de Cierre para la suma de enteros tenemos que $k + m \in \mathbb{N}$. Con lo cual, si llamamos $n = k + m$ (como para escribir menos), donde n es entero. Tenemos

$$a + b = 2 \cdot n \qquad con\ n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio.
Comprueba que el producto de dos números pares es también un número par.

Entonces, por la propia definición de número par, tenemos que $a + b$ es un número par. Este ejemplo, si bien es sencillo, nos introduce en la técnica de simbolización, fundamental para resolver problemas. Con estas primeras técnicas de simbolización nos iremos familiarizarnos para poder analizar situaciones no tan simples.

Números Impares

Otro los subconjuntos posibles del conjunto de los naturales nos encontramos con los números impares.

$$I = \{1,3,5,7,9,\dots\}$$

En este caso, no podríamos decir que los impares son múltiplos de algún número en particular.

Sin embargo, no es muy difícil darse cuenta que cualquier número impar es el consecutivo de un número par, por lo que podemos afirmar que

> Diremos que un número natural a es impar si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que
> $$a = 2 \cdot k + 1$$

A partir de la definición, comprobemos que la suma de dos números impares es siempre un número par.

Veamos, consideremos dos números impares, a y b. Por la definición, tenemos,

$$\begin{aligned} a &= 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \\ b &= 2\ell+1, \quad \ell \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Entonces, sumando

$$\begin{aligned} a+b &= 2k+1+2\ell+1 \\ &= 2(k+\ell)+2 \\ &= 2(k+\ell+1) \end{aligned}$$

Nuevamente, en virtud de la Ley de cierre, tenemos que $k+\ell+1$ pertenece a $\mathbb{N}$ por lo que podemos escribir

Encuentra un subconjunto infinito de los naturales.

$$a+b = 2 \cdot m$$

con $m \in \mathbb{N}$ que es la definición de un número par.

División en $\mathbb{N}$

Cuando comenzamos el capítulo de números, hicimos una observación respecto a lo bien definida que puede estar dada una operación entre sus elementos. Así, la resta en $\mathbb{N}$ no estaba bien definida puesto que si a un determinado número le restábamos un número mayor, esta operación ya no daba un resultado dentro de $\mathbb{N}$.

Otro aspecto a considerarse para la ”buena definición” de una operación era que el resultado de la misma sea un elemento del conjunto.

En ese sentido, la división en $\mathbb{N}$ no satisface esa definición, ya que como sabemos el resultado de una división en $\mathbb{N}$ da, en principio, dos números: el cociente y el resto.

Es decir que en un sentido podemos decir que la división no está definida, pero en otro, decimos el resultado de la división son dos números: el cociente y el resto. Este resultado se denomina *Algoritmo de la División en* $\mathbb{N}$

> *Teorema del Algoritmo de la División en* $\mathbb{N}$
> *Dados a y b números naturales, $b \neq 0$, existen y son únicos*
> *q y r números naturales, tales que*
> $a = b \cdot q + r, \qquad \text{con } r < b$
> q es llamado cociente y r el resto.

Por ejemplo, consideremos el 17 y el 3. Podemos escribir

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

el cociente es el 5 y el resto, 2. Notemos que el resto satisface la condición establecida por el teorema.

Cuando el dividendo es menor que el divisor, el resultado sigue siendo válido, sólo que el cociente es cero y el resto es el propio dividendo, si por ejemplo dividimos 9 con 15,

$$9 = 15 \cdot 0 + 9$$

Divisibilidad en $\mathbb{N}$

Al considerar la división entre a y b, con $a, b \in \mathbb{N}$ cuando el resto es cero, tenemos,

$$a = b \cdot q + 0 = b \cdot q$$

lo que establece una relación interesante en $\mathbb{N}$: la divisibilidad.

Cuando dados $a, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$a = b \cdot q$$

diremos que

- *a es divisible por b*
- *a es múltiplo de b*
- *b divide a a*
- *b es divisor de a*

Potenciación en $\mathbb{N}$

Así como pudimos definir -en $\mathbb{N}$- el producto de dos naturales a partir de la suma repetida de un mismo número.

Consideremos $a \in \mathbb{N}$ al cual lo multiplicamos por sí mismo una cierta cantidad de veces, n,

> *Definimos la potencia n-ésima de a*
> $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces } a}$$

Por ejemplo, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, etc.

Propiedades de la Potenciación

Consideremos $a, b \in \mathbb{N}$, consideremos potencias naturales, es decir, la definición de potencias de un número será la multiplicación por sí mismo una cierta cantidad de veces (que será el índice de la potencia).

a) Definición.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a}$$

b) Producto de potencias de igual base.

$$a^n \cdot a^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ veces } a}) = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(n+m) \text{ veces } a} = a^{n+m}$$

c) Potencia de potencia.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \cdots \cdot a^n}_{m \text{ veces } a^n} = \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a}) \cdot \cdots \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a})}_{m \text{ veces } a^n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(n \cdot m) \text{ veces } a} = a^{n \cdot m}$$

d) Potencia de un producto. Distributividad de la potencia en el producto.

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \cdots \cdot ab}_{n \text{ veces } a \cdot b} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ veces } b} = a^n \cdot b^n$$

★ La potencia NO ES DISTRIBUTIVA CON LA SUMA.

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

Con un contraejemplo ponemos en evidencia la falsedad:

$$(2+1)^2 = 3^2 = 9$$

por otro lado,

$$2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

entonces,

$$(2+1)^2 \neq 2^2 + 1^2$$

Ejemplo.

Calculemos 6^3. Si queremos hacer cálculos parciales más sencillos, podemos escribir a 6 como $2 \cdot 3$, con lo que tenemos

$$6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$$

Para concluir la definición de potencia natural de un número natural debemos tener en cuenta que hemos incluído al cero en el conjunto de los naturales, por lo cual *es necesario dar un sentido a la potencia nula*.

Vamos entonces, a dar una definición más axiomática de la potencia natural de un número natural.

Potencia Natural de un Número Natural.

Consideremos un número natural $a \neq 0$ vamos a definir la potencia a^n con n natural como

- $a^0 = 1$, esto es una imposición.
- $a^1 = a$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a}$

Retomaremos potencias para los demás conjuntos numéricos, pero las propiedades obtenidas para la potencias naturales continuarán siendo válidas.

Notación de Sumatorias y Productorias

Es muy común al trabajar con números naturales trabajar con sumas y productos o bien de muchos términos, o bien con un número indeterminado de términos.

Notación de Sumatoria

Supongamos que queremos sumar las primeras 16 potencias de 2, comenzando desde cero. Podríamos escribir

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{15}$$

Esta forma, presupone que los puntos suspensivos indican las potencias cuarta de 2, la quinta de 2, hasta la potencia décimo cuarta.

De alguna manera, el uso de puntos suspensivos son inequívocos, pero depende del contexto.

Si lo que sumásemos tuviera otro tipo de definición surge la necesidad de explícitar mejor esta situación.

Para ello, se define un símbolo que indica que se está sumando, y lo que se suma constituye el término general de la sumatoria.

La notación es, entonces

$$\sum_{inicio}^{fin} [termino\ a\ sumar]$$

donde

- inicio: significa desde donde comienza la sumatoria.
- fin: un índice que indica hasta dónde sumamos.
- término a sumar: Es una expresión que indica que estamos sumando.

Volviendo al ejemplo de la suma de las potencias de 2, notemos que el término a sumar es una potencia $i-$ésima de dos, donde i varia desde 0 hasta 15. De esta manera, podemos escribir,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{15} = \sum_{i=0}^{i=15} 2^i$$

Otro ejemplo es la suma de los primeros 15 números naturales. La suma es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 15$$

Podemos apreciar que si queremos usar el símbolo de sumatoria deberíamos poner

$$1 + 2 + 3 \cdots + 15 = \sum_{i=1}^{15} i$$

En este curso no usaremos mucho la notación de sumatorias, pero familiarizarse con él traerá beneficios a mediano plazo al cursar las materias de Matemática.

Aplica lo aprendido. Escribe en notación de sumatoria la suma de los primeros 10 números pares ¿Cuánto resultó esa suma?

Notación de Productoria

De manera análoga al uso de la notación de sumatoria, para productos se utiliza la notación

$$\prod_{inicio}^{fin} [factor\ a\ multiplicar]$$

Como ejemplo, multipliquemos los primeros 15 numeros impares. Como vimos, podemos escribir,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 29$$

Como

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot 0 + 1 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ \vdots &= \vdots \\ 29 &= 2 \cdot 14 + 1 \end{aligned}$$

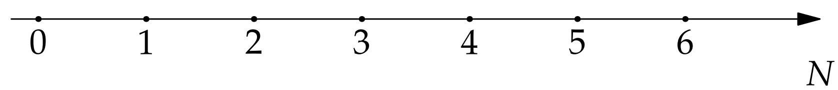
esto significa que el factor a multiplicar tiene por expresión $2 \cdot j + 1$, donde j va desde 0 a 14.

Entonces, el producto a calcular es

$$\prod_{j=0}^{14} (2 \cdot j + 1)$$

Representación en la Recta Numérica

Dado el ordenamiento entre los números naturales, podemos representar en una recta cada número natural. Esta recta en realidad posee puntos aislados (discretos) ya que entre dos naturales consecutivos no hay ningún número natural.



Aplicaciones. Simbolización de Enunciados

Concluyamos el capítulo de números naturales aplicando las definiciones vistas en la simbolización matemáticas de situaciones enunciadas coloquialmente.

Como guía para la simbolización puede ser de ayuda el siguiente esquema para la organización de las ideas.

- Leer atentamente el enunciado
- Identificar el conjunto numérico que es parte del contexto del enunciado
- Asociar a las cantidades involucradas con letras. Estas serán llamadas variables.
- Escribir la ecuación que describa la situación a través de las variables.

Escribamos algunos ejemplos.
1. Escribir *la suma de dos naturales consecutivos.*

Notemos que el enunciado nos pide que sumemos dos naturales con la particularidad de que uno es el siguiente al otro. Es decir, este enunciado parece contener dos variables, pero hay un vínculo entre ambas que con una sola se puede describir perfectamente. Esto significa que si llamamos n al número en cuestión, el que le sigue será $n+1$. Con lo cual, lo que debemos simbolizar es la suma de ambos, es decir,

$$n+(n+1)$$

notemos además que

$$n+(n+1)=2n+1$$

lo que significa que la suma de dos enteros consecutuvos es siempre un número impar.

2. Escribir: *la suma de los múltiplos de 5 con los cuadrados de los múltiplos de 3*

Este enunciado posee claramente dos variables: la primera es la que define a los múltiplos de 5 y la segunda, a los múltiplos de 3. Si llamamos n a la primera variable, tendremos que la cualidad que la define es

$$n = 5 \cdot k \qquad k \in \mathbb{N}$$

la segunda variable, llamémosla m viene definida a través de la relación

$$m = 3 \cdot \ell \qquad \ell \in \mathbb{N}$$

Entonces, escribir el enunciado es escribir la suma $n + m^2$, esto es

El uso del punto para denotar la multiplicación no es necesario escribirlo todo el tiempo. A menos que sea imprescindible omitiremos el $\cdot$

$$5 \cdot k + (3 \cdot \ell)^2 = 5k + 9\ell^2$$

3. Como último ejemplo calculemos el área de un rectángulo cuyos lados son números naturales, y que el lado mayor sea el doble que el lado menor, más 3. En este caso tenemos dos variables naturales: los lados del rectángulo. Llamemos b y h a los lados del rectángulo. El área del rectángulo es

$$A = b \cdot h$$

Ahora, tenemos que b y h no son cualesquiera, ya que se plantea una relación que establece que el lado mayor es el doble del lado menor, más 3. Entonces,

$$b = 2h + 3$$

Finalmente, la expresión del área es

$$A = bh = (2h + 3)h$$

El conjunto de los Enteros

La operación suma para el conjunto de los números naturales admite un neutro, el cero, de manera tal de que para todo número natural

$$a + 0 = a$$

Notemos que a cualquier natural no nulo mayor que 0 es posible construirlo a partir de una suma de dos naturales no simultáneamente nulos. Por ejemplo, el 2, puede ser construído como 1+1 o 2+0. Sin embargo, el neutro para la suma, no es posible de ser obtenido como suma de dos naturales no simultáneamente nulos.

Si a los axiomas de la suma en los números naturales le incorporamos el siguiente:

Existencia de un opuesto aditivo

Esto significa que dado un elemento a, existe un elemento $\tilde{a}$ tal que

$$a + \tilde{a} = 0$$

entonces se dice que *$\tilde{a}$ es el opuesto de a*. Claramente, a es el opuesto de $\tilde{a}$

Por razones de familiaridad denotamos al <u>opuesto de a</u> como $-a$

▲**Obervación.** La notación del opuesto como $-a$ es una definición. Nada, hasta ahora indica que $-a$ es el producto $(-1) \cdot a$.

Si ahora, por cada número natural a incoporamos su opuesto, el conjunto $\mathbb{N}$ se amplía a los números negativos.

Esta incorporación define el *conjunto de los enteros*, denotado por $\mathbb{Z}$

Resumiendo, el conjunto de los enteros es el conjunto de los naturales, junto con sus opuestos.

En el conjunto de los enteros, cada elemento $a \in \mathbb{Z}$ tiene un $-a$ tal que

$$a + (-a) = 0$$

Esta incorporación induce una nueva operación: **la resta**.

Vamos a definir $a - b$ como la suma de a con el opuesto de b

$$\boxed{a - b \equiv a + (-b)}$$

El opuesto de 3 es -3. El opuesto de -5 es 5.

Analicemos que ocurre en el conjunto de los enteros con el producto.

La propiedad distributiva para el producto establece que

$$a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c)$$

Propiedades del producto en $\mathbb{Z}$

1. Calculemos

$$a \cdot 0.$$

Tenemos que

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0$$

Entonces,

$$a = a + a \cdot 0$$

entonces, por definición de neutro, tendremos que

$$a \cdot 0 = 0$$

2. Calculemos $(-1) \cdot a$.

A partir de lo obtenido en el punto **1.**, $a \cdot 0 = 0$. Ahora, trabajando un poco...

$$a \cdot 0 = a \cdot (1 - 1) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot 1 + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a = 0$$

Entonces, por la definición de opuesto, tenemos que

▲ **Observación.** Ahora sí, multiplicando por -1 obtenemos opuestos.

$$(-a) = (-1) \cdot a$$

3. Veamos que ocurre si multiplicamos un número por el opuesto de otro.

Partiendo de

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot (b - b) = 0$$

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$$

Por la definición de opuesto, tenemos que si $a \cdot b + algo = 0$ entonces ese $algo$ debe ser el opuesto, con lo cual,

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

4. Multiplicación de dos opuestos.

Como vimos, todo número por cero da como resultado cero.

Entonces,

$$(-a) \cdot 0 = 0$$

entonces

$$(-a)(b - b) = 0$$

$$(-a)\cdot b+(-a)\cdot(-b)=0$$

Además, en **2.** vimos que $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ por lo tanto,

$$-(a\cdot b)+(-a)\cdot(-b)=0$$

entonces, $(-a)\cdot(-b)$ es el opuesto de $-(a\cdot b)$ que, por definición es $a\cdot b$

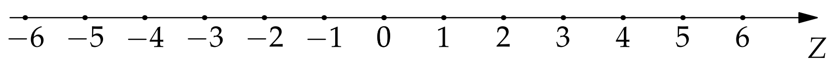
Lo que encontramos se denomina *regla de los signos* y establece que

$$\begin{aligned}+\cdot+ &= +\\ +\cdot- &= -\\ -\cdot+ &= -\\ -\cdot- &= +\end{aligned}$$

El conjunto $\mathbb{Z}$ por extensión es

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$$

La incorporación de los negativos, extiende la recta numérica a la izquierda del cero,



Valor Absoluto de un número

Dado un entero, a, este puede ser positivo o negativo

Vamos a decir que número a
Es positivo si $a > 0$ y
Es negativo si $a < 0$

Sin embargo, 2, -2; 3 y -3; 21 y -21; etc, tienen algo que pareciera *intrínseco* independientemente del signo. Esta cualidad intrínseca del número se denomina *valor absoluto* lo denotamos $|a|$ y puede interpretarse como la distancia sobre la recta numérica del número al cero.

Lo definimos como sigue:

$$\boxed{|a|=\begin{cases}a & \text{si} \quad a\geq 0\\ -a & \text{si} \quad a<0\end{cases}}$$

Con esta definición, tendremos que $|4|=4$ (puesto que 4 es positivo) y $|-12|=12$, ya que como 12 es negativo

$$|-12|=-(-12)=12$$

Más aún, dados dos números a y b el valor absoluto $|a-b|$ es la distancia entre a y b. Esta interpretación será de utilidad en Matemática A.

Algunas propiedades del valor absoluto

Consideremos dos enteros, a y b. Podemos comprobar que

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Ahora consideremos tres situaciones particulares.
1. $a = 2$ y $b = 5$
Calculemos $|a+b|$. Tenemos que $a+b = 2+5 = 7$. Como $7 \geq 0$, tendremos

$$|2+5| = |7| = 7 = |2| + |5|$$

2. $a = -2$ y $b = -5$
Calculemos $|a+b|$. Tenemos que $a+b = -2+(-5) = -7$. Como $-7 < 0$, tendremos

$$|-2-5| = |-7| = 7 = |-2| + |-5|$$

3. $a = -2$ y $b = 5$
Calculemos $|a+b|$. Tenemos que $a+b = -2+5 = 3$. Como $3 \geq 0$, tendremos

$$|-2+5| = |3| = 3 \neq |-2| + |5|$$

4. $a = 2$ y $b = -5$
Calculemos $|a+b|$. Tenemos que $a+b = 2+(-5) = -3$. Como $-3 < 0$, tendremos

$$|2-5| = |-3| = 3 \neq |2| + |-5|$$

Con estos cuatro ejemplos parece que se cumple que si a y b tienen el mismo signo, $|a+b| = |a|+|b|$. Ahora, si tienen signo distinto, lo que se cumple es $|a+b| < |a|+|b|$.

Esta propiedad es general, y se conoce como *desigualdad triangular*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

División en $\mathbb{Z}$

En los números enteros, el concepto de división es análogo al formulado para los números naturales, pero con la inclusión de los números negativos.

Teorema del Algoritmo de la División en $\mathbb{Z}$
Dados a y b, números enteros, $b \neq 0$, existen y son únicos q y r números enteros, $r \geq 0$, tales que

$$a = b \cdot q + r, \qquad \text{con } r < |b|$$

q es llamado cociente y r el resto.

Notemos que el teorema es similar, salvo que introduce una restricción para lo que debe ser el resto. Esta restricción es que sea no negativo, esto es, o positivo o nulo.

Veamos por ejemplo si queremos hallar el cociente y el resto de dividir 23 con 4.

Para ello, hacemos la división como sabemos,

Asumiremos que el procedimiento para la división de enteros es conocido. Si es necesario, realiza varias como para recordar el mecanismo.

$$\begin{array}{l|l} 23 & \underline{\quad 4 \quad} \\ 3/ & \quad 5 \end{array}$$

y la comprobación de que la división fue bien hecha se realiza expresando el teorema del algoritmo de la división. En efecto,

$$23 = 4 \cdot 5 + 3$$

El cociente es 5 y el resto es 3 (que efectivamente es menor que el valor absoluto de 4 y positivo).

Supongamos ahora que queremos dividir 23 con -4. Dispongamos nuevamente los números en el esquema de división

$$\begin{array}{l|l} 23 & \underline{\quad -4 \quad} \end{array}$$

¿Cuál será el número que deberemos poner en el cociente? Una alternativa es que hagamos la división como si tuviéramos números positivos, y luego le incorporamos el signo, correspondiéndose con la regla de los signos (en un sentido más amplio, es decir *" positivo con positivo es positivo, y así sucesivamente"*). Entonces, como 23 dividido 4 da 5 (con resto 3) y como tenemos un positivo y un negativo, pondremos

$$\begin{array}{l|l} 23 & \underline{\quad -4 \quad} \\ & \quad -5 \end{array}$$

Ahora, como $(-4) \cdot (-5) = 20$ tendremos que el resto es 3.

$$\begin{array}{l|l} 23 & \underline{\quad -4 \quad} \\ 3/ & \quad -5 \end{array}$$

Quere decir que

$$23 = (-4) \cdot (-5) + 3$$

lo que significa que el cociente es -5 y el resto, 3, satisfaciendo lo establecido por el Teorema del Algoritmo de la División.

Ahora calculemos la división de -23 con 4. El esquema de la división será

$$\begin{array}{l|l} -23 & \underline{\quad 4 \quad} \end{array}$$

Ahora, nuevamente, ¿qué número irá al cociente? Pensemos de la misma manera que en la vez anterior, con lo que obtendríamos,

$$\begin{array}{rl} -23 & |\underline{\quad 4 \quad} \\ & \quad -5 \end{array}$$

Si seguimos con el procedimiento, esto es, multiplicar el cociente por el divisor y ver con qué número obtenemos el del dividendo, tendremos que

$$\begin{array}{rl} -23 & |\underline{\quad 4 \quad} \\ -3/ & \quad -5 \end{array}$$

el que parece un resto es un -3 porque $4 \cdot (-5) = -20$ y para igualar al -23 necesito sumar -3.

Claramente, -3 no puede ser el resto, ya que es negativo. Ahora, pensemos qué hubiera pasado si en lugar de -5 colocábamos -6 en el cociente. Para calcular el resto, tenemos que multiplicar 4 con -6 y sumar el número necesario para igualar al -23. Con lo cual tenemos

$$\begin{array}{rl} -23 & |\underline{\quad 4 \quad} \\ 1/ & \quad -6 \end{array}$$

Ahora, lo que "parece" resto, lo es efectivamente, ya que es positivo y se satisface la relación establecida en el Teorema.

Piensa entonces cómo tratar con divisiones de números de diferente signo y también con dividendo y divisor negativos.

$$-23 = 4 \cdot (-6) + 1$$

Divisibilidad en $\mathbb{Z}$

Cuando una división entre a y b tiene por resto el cero diremos que a es divisible por b, de la misma manera que lo hacíamos en los naturales. La única diferencia es que los números involucrados pueden ser positivos o negativos.

Diremos que a es divisible por b (ambos en $\mathbb{Z}$) (y todas las equivalencias ya mencionadas en los naturales) si existe un $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = b \cdot q$$

Así, por ejemplo, -15 es divisible por 3 ya que

$$-15 = 3 \cdot (-5)$$

donde claramente $-5 \in \mathbb{Z}$.

Potencias Naturales de Números Enteros

De la misma manera que hemos definido las potencias naturales para números naturales, lo haremos para números enteros. De esta manera, tendremos que $\forall a \in \mathbb{Z}$ definimos la potencia $n-$ésima de a a partir del producto de a por sí mismo.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces } a}$$

Ahora, el signo del número a^n dependerá de la aplicación reiterada de la regla de los signos.

En términos axiomáticos definimos la potencia (natural) de un número entero como

Piensa qué signo debería tener la potencia de un entero negativo para
$i)$ n par
$ii)$ n impar.

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^n &= a \cdot a^{n-1}, \quad para \;\; n > 1 \end{aligned}$$

Con esta definición, se satisfacen todas las propiedades que comprobamos para naturales.

Resumen de las Operaciones en $\mathbb{Z}$

Como las operaciones en enteros fueron definidas a partir de las correspondientes a los naturales, repasemos todas las operaciones a partir de las propiedades que se satisfacen.

Propiedades de la Suma en $\mathbb{Z}$

- Ley de Cierre
- Asociativa
- Conmutativa
- Existencia de neutro
- Existencia de opuesto

Propiedades del Producto en $\mathbb{Z}$

- Ley de Cierre
- Asociativa
- Conmutativa
- Existencia de neutro

División en $\mathbb{Z}$

La división está definida a partir del Algoritmo de la división. Al dividir a por $b \neq 0$, existen y son únicos el cociente q y el resto r tales que

$$a = b \cdot q + r, \qquad con\ \ r \geq 0\ \ y\ \ r \leq |b|$$

Potencias naturales en $\mathbb{Z}$

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$

- $a^n = a \cdot a^{n-1}, \quad para \;\; n > 1$
- Producto de potencias de igual base.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- Potencia de potencia.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- Potencia de un producto. Distributividad de la potencia en el producto.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Números Racionales

Cuando estudiamos la división en el conjunto de los enteros (y naturales) el resultado de la operación no era un número, sino dos: el cociente y el resto.

Sin embargo, en muchas situaciones nos encontramos en la necesidad de dividir lo que hasta ahora consideramos indivisible: la unidad. De esta manera, el concepto *mitad*, *tercera parte*, etc, son relaciones asociadas a fracciones de la unidad.

Este tipo de formulaciones tienen sentido en el conjunto de los números racionales. De esta manera, la mitad de uno la denotamos $\frac{1}{2}$.

Dado un entero n, podemos dividir la unidad en n partes iguales de valor

$$\frac{1}{n}$$

Éste, es el número fraccionario que tomaremos como base para nuestro análisis. Si además, consideramos m veces la n-ésima parte de la unidad, la denotaremos

$$m \cdot \frac{1}{n} \equiv \frac{m}{n}$$

Estamos familiarizados con las fracciones de una cantidad. Basta pensar cuando cortamos una pizza, cortamos una torta, etc. La porción de pizza en general es $\frac{1}{8}$ de la misma.

Los Números Racionales

El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, está definido como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

A partir de esta definición, los números $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$ están en $\mathbb{Q}$.

Notemos que el conjunto de los enteros está contenido en $\mathbb{Q}$. En efecto, todo entero n se puede escribir como $\frac{n}{1}$ que satisface la condición de pertenencia al conjunto de los racionales.

Al poseer los elementos de $\mathbb{Q}$ una forma particular, deberemos redefinir las operaciones suma producto, etc.

Fracciones Equivalentes

Dado el racional $\frac{p}{q}$ y el entero $m \neq 0$ tendremos que

$$\frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{m \cdot q}$$

Suma en $\mathbb{Q}$

Consideremos dos elementos de $\mathbb{Q}$. Sean éstos $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$.

Escribe 3 fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$

Definiremos la suma de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ como

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{p\cdot s+r\cdot q}{q\cdot s}$$

Si sumamos

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{21}$$

da como resultado

$$\frac{1\cdot 21+2\cdot 6}{6\cdot 21}=\frac{33}{126}=\frac{3\cdot 11}{3\cdot 42}=\frac{11}{42}$$

Recordemos que la suma de fracciones se puede realizar obteniendo el denominador común a través del mínimo común múltiplo (m.c.m), que en el caso de 6 y 21 es 42.

Con esta definición tenemos

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{31}{35}$$

Propiedades de la suma

- Ley de Cierre. Dados dos racionales $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ y a partir de la definición

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s+r\cdot q}{q\cdot s}$$

  tenemos que el numerador por la ley de cierre en enteros es un entero y el denominador también. Por tal motivo, tendremos que el resultado es el cociente de dos enteros, por lo que satisface la definición de racional.

- Asociativa. Consideremos tres racionales $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ y $\frac{m}{n}$ Calculando directamente a partir de la definición tenemos

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)+\frac{m}{n}=\frac{p}{q}+\left(\frac{r}{s}+\frac{m}{n}\right)$$

- Conmutativa.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$$

- Existencia del neutro. El 0 es el neutro para la suma, ya que al ser entero, es racional y por la propia definición de la suma tenemos

$$\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}+\frac{0}{r}=\frac{p\cdot r+0\cdot q}{q\cdot r}=\frac{p\cdot r}{q\cdot r}=\frac{p}{q}$$

- Existencia del opuesto. Notemos que $\frac{-p}{q}$ es el opuesto de $\frac{p}{q}$. En efecto,

$$\frac{p}{q}+\frac{-p}{q}=\frac{pq-qp}{q\cdot q}=\frac{0}{q^2}=0$$

  Denotamos al opuesto como $-\frac{p}{q}$

Dado que $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ si sumamos dos racionales enteros debería dar la suma en $\mathbb{Z}$. Veamos,

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a\cdot 1+b\cdot 1}{1\cdot 1}=a+b$$

Producto en $\mathbb{Q}$

Dados dos racionales a y b, los que podemos escribir de la forma $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{r}{s}$

Definiremos la suma de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ como

$$\boxed{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}}$$

Ejemplo. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

Notemos que si tuvieramos dos mitades de una cantidad c

$$2 \cdot \frac{c}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{c}{2} = \frac{2 \cdot c}{2 \cdot 1} = \frac{c}{1} = c$$

Propiedades del Producto

- Ley de Cierre. Dados dos racionales $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ y a partir de la definición

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot q}{q \cdot s}$$

  tenemos que el numerador por la ley de cierre en enteros es un entero y el denominador también. Por tal motivo, tendremos que el resultado es el cociente de dos enteros, por lo que satisface la definición de racional.

- Asociativa. Consideremos tres racionales $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ y $\frac{m}{n}$ Calculando directamente a partir de la definición tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{m}{n} &= \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \cdot \frac{m}{n} \\ &= \frac{p \cdot r \cdot m}{q \cdot s \cdot n} = \frac{p \cdot (r \cdot m)}{q \cdot (s \cdot n)} = \frac{p}{q}\left(\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}\right) \end{aligned}$$

- Conmutativa. De manera elemental se comprueba que

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$$

- Existencia del neutro. El 1 es el neutro para el producto, ya que al ser entero, es racional y por la propia definición de producto tenemos

$$\frac{p}{q} \cdot 1 = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1} = \frac{p}{q}$$

- Existencia del inverso multiplicativo. Dado un racional $\frac{p}{q}$ con $p \neq 0$ y $q \neq 0$ y la definición de producto, notemos que si realizamos el producto

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} = \frac{1}{1} = 1$$

  Esto significa que cada racional no nulo admite un inverso.

▲ **Observación.** En los naturales y enteros no existen inversos multiplicativos. Esta propiedad, en cierto sentido, *completa* la operación.

A partir de las propiedades, podemos calcular el inverso de $\frac{3}{5}$ que será el $\frac{5}{3}$.

Si queremos, por ejemplo calcular el inverso del entero no nulo a (pero concebido como racional) tendremos que $\frac{1}{a}$ será el inverso multiplicativo.

La Propiedad Distributiva

Cada vez que estudiamos en un conjunto las operaciones suma y producto, debemos analizar si al multiplicar un número por otro que es suma de dos se satisface la propiedad denominada *distributividad.*

Calculemos el siguiente producto

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right)$$

Para efectuar este producto obtengamos el resultado de la suma primero y luego hagamos la multiplicación

$$\frac{r}{s} + \frac{m}{n} = \frac{r \cdot n + m \cdot s}{s \cdot n}$$

Ahora, multipliquemos este resultado por $\frac{p}{q}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \cdot \frac{r \cdot n + m \cdot s}{s \cdot n} &= \frac{p(r \cdot n + m \cdot s)}{q \cdot n \cdot s} \\ &= \frac{p \cdot r \cdot n + p \cdot m \cdot s}{q \cdot n \cdot s} \end{aligned}$$

Si recordamos la relación

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

podemos escribir a la última fracción como

$$\frac{p \cdot r \cdot n + p \cdot m \cdot s}{q \cdot s \cdot n} = \frac{(p \cdot r \cdot n + p \cdot m \cdot s) \cdot q}{q \cdot q \cdot s \cdot n}$$

entonces, aplicando distributiva (en enteros) en el numerador, tenemos,

$$\frac{(p \cdot r \cdot n + p \cdot m \cdot s) \cdot q}{q \cdot q \cdot s \cdot n} = \frac{q \cdot p \cdot r \cdot n + q \cdot p \cdot m \cdot s}{q \cdot q \cdot s \cdot n}$$

Notemos que el término de la derecha puede interpretarse como la suma de las dos fracciones

$$\frac{q \cdot p \cdot r \cdot n + q \cdot p \cdot m \cdot s}{q \cdot q \cdot s \cdot n} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} + \frac{p \cdot m}{q \cdot n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$$

Con lo cual, comprobamos en general que se cumple la propiedad distribuiva.

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$$

División en $\mathbb{Q}$

Así como la resta en enteros surgió a partir de que la suma admitía un opuesto, vamos a definir una división en $\mathbb{Q}$ a partir de la propiedad de que en el producto de racionales existe un inverso multiplicativo.

Consideremos dos números racionales, denotados por $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s} \neq 0$

Definimos la división de $\frac{p}{q}$ con $\frac{r}{s}$ como

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}$$

Ejemplo. $\frac{3}{5} : \frac{7}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$

Es decir, la división de dos números racionales se puede pensar como el producto del dividendo ($\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$) por el inverso multiplicativo del divisor ($\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$).

Ejemplo: $\frac{4}{5} : \frac{5}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$

Observación:

- ★ Recordad que la división no es conmutativa
- ★ La propiedad distributiva no es válida respecto del denominador, es decir

$$\frac{1}{2+2} \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Notemos que dados tres racionales a, b, y c, $c \neq 0$

$$(a+b) \div c = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

En efecto, si calculamos,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b \cdot c}{c \cdot c} = \frac{c(a+b)}{c \cdot c} = \frac{a+b}{c}$$

Lo que no es verdadero es que haya un tipo de distributividad con respecto al denominador,

★ Atención

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Potencias en $\mathbb{Q}$

En el caso de potencias naturales, la definición será la misma que aplicamos para los naturales y enteros, esto es, la potencia como multipicación reiterada de un mismo número. Entonces, dado un racional expresado en la forma $\frac{p}{q}$ tenemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdots \left(\frac{p}{q}\right)}_{n \text{ veces } \frac{p}{q}}$$

Si aplicamos ahora la definición de producto de fracciones tenemos,

$$\underbrace{\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdots \left(\frac{p}{q}\right)}_{n \text{ veces } \frac{p}{q}} = \frac{\overbrace{p \cdot p \cdots p}^{n \text{ veces } p}}{\underbrace{q \cdot q \cdots q}_{n \text{ veces } q}} = \frac{p^n}{q^n}$$

Notemos que la propia definición introduce el concepto de distributividad con relación a un cociente.

Potencias negativas

La introducción de un inverso multiplicativo, nos conduce a la posibilidad de definir potencias negativas.

Recordemos las propiedades de las potencias de números enteros. Estas propiedades necesariamente deben seguir siendo válida por un principio de consistencia.

Tenemos además, que la existencia de un inverso multiplicativo de un número a establece

$$1 = a \cdot \frac{1}{a}$$

Por otro lado, tenemos que $a^0 = 1$, con lo cual

$$a^0 = a \cdot \frac{1}{a} = a^1 \cdot \frac{1}{a}$$

Supongamos que $\frac{1}{a}$ es alguna potencia de a que deberíamos determinar. Llamemos n a esa potencia y asumamos como válidas todas las propiedades hasta ahora vistas. Tenemos entonces,

$$a^0 = a \cdot \frac{1}{a} = a^1 \cdot \frac{1}{a} = a^1 \cdot a^n = a^{1+n}$$

Esto implica que

$$a^0 = a^{1+n}$$

para que esto ocurra, n debe ser -1. Entonces, con estas asociaciones tendremos

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

Entonces, como $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de a, tendremos que a^{-1} es el inverso multiplicativo de a.

La introducción de a^{-1} nos permite calcular potencias enteras.

Calculemos a^{-n} (cuidado, que tenga el signo $-$ adelante no significa que sea negativo, ya que dependerá que signo tenga n).

$$a^{-n} = a^{(-1)\cdot n} = a^{n\cdot(-1)} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}$$

Todas las propiedades de la potencia en enteros se aplican a las potencias de racionales.

Ejemplo.

i) $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9$

Orden en $\mathbb{Q}$ y la recta numérica

¿Cuál racional es más grande, $\frac{2}{5}$ o $\frac{3}{7}$?

Para poder comparar y ordenar los números racionales es aconsejable comparar fracciones que tengan el mismo denominaror ya que será el orden en el numerador el que establezca cuál de los racionales será mayor o menor que otro.

En este caso particular, notemos que

$$\frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{14}{35}$$

Además,

$$\frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35}$$

Entonces, claramente, tendremos que $\frac{14}{35}$ es menor que $\frac{15}{35}$

Otra manera de comparar es aplicando el siguiente principio:

$$Si\ a \leq b, \qquad \longleftrightarrow \qquad b - a \geq 0$$

Así,

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 - 3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{-1}{35} = -\frac{1}{35} < 0$$

Con lo que obtenemos el mismo resultdo, $\frac{2}{5}$ es menor que $\frac{3}{7}$

Densidad de $\mathbb{Q}$

Hasta ahora, entre dos números enteros consecutivos de la recta numérica no hay ningún otro número entero.

Ahora, tomemos el 0 y el 1. Notemos que el $\frac{1}{2}$ está entre ellos, no sólo entre ellos, ubicado en la mitad del segmento que los une sobre la recta numérica. Ahora, el $\frac{1}{4}$, estará entre el 0 y el $\frac{1}{2}$. El $\frac{1}{8}$ estará entre el 0 y el $\frac{1}{4}$ y así sucesivamente. Lo mismo podemos hacer entre dos números cualesquiera.

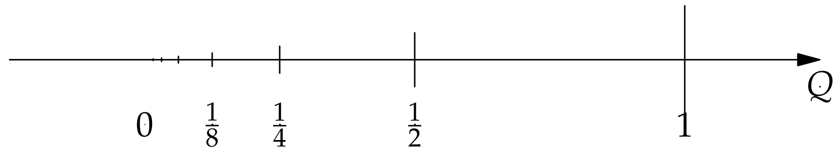
Es más, consideremos dos racionales cualesquiera a y b. El promedio entre a y b lo calculamos como

$$promedio = \frac{a + b}{2}$$

y es un número entre a y b, a la mitad del segmento de la recta numérica. En virtud de la Ley de Cierre (comprobarlo) este promedio será un racional. Lo que significa que entre dos racionales cualesquiera hay siempre un racional (al menos el promedio).

La secuencia de construir promedios no tiene fin, ya que siempre puedo calcularlo, independientemente cuán cerca estén los números en cuestión. Si intentamos representarlos en la recta, ya entre el cero y el uno tendremos infinitos racionales, calculado como mitades de mitades de mitades, y así sucesivamente.

Esta propiedad se conoce como densidad en la recta numérica.



La recta numérica queda prácticamente llena de números, puesto que, como analizamos, cada par de números tiene infinitos intermedios.

¿Llenamos toda la recta con los racionales?

El problema de determinar si con los racionales llenamos la recta será analizado en el capítulo siguiente.

Representación Decimal

El sistema posicional de los números (dígitos) es tan habitual que probablemente poco reflexionemos al respecto. Por ejemplo, el número 325 es una simplificación de

$$300 + 20 + 5$$

es decir que vamos posicionando de derecha a izquierda las unidades, decenas, centenas, unidad de mil, etc. Cada dígito es un número entre 0 y 9.

Cada dígito representa el coeficiente de una potencia de 10, para el número 325 tenemos:

- 5 es el coeficiente de $1 = 10^0$
- 2 es el coeficiente de $10 = 10^1$
- 3 es el coeficiente de $100 = 10^2$

De esta manera, podemos escribir

$$325 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

En términos generales, si tenemos un número entero cualquiera lo escribimos

$$d_n d_{n-1} d_{n-2} \_\_\_ d_2 d_1 d_0$$

que en la expansión en potencias de 10 significa

$$d_n d_{n-1} d_{n-2} \_\_\_ d_2 d_1 d_0 = d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0$$

Como ejemplo, el número 2345 tiene $d_0 = 5$, $d_1 = 4$, $d_2 = 3$, $d_3 = 2$ con lo cual,

$$2345 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Si el número no llegara a ser entero, su representación posicional involucra las potencias negativas de 10. Por ejemplo, el número $3,21$ representa

$$3,21 = 3 + 0,2 + 0,01$$

Ahora bien,

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}, \quad 0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

Entonces,

$$3,21 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2}$$

Aplica lo aprendido. Escribe el desarrollo en potencias de 10 de los números
i) $125,125$
ii) $0,003$

La representación numérica posicional es la que denominamos *representación decimal* puesto que la base numérica es 10.

Dado un número dado en representación decimal, multiplicar por 10 produce en el número un corrimiento de la coma una posición a la derecha, ya que lo que hace es correr las posiciones de lo dígitos un lugar hacia la izquierda, que es la dirección de aumento de las potencias de 10.

En efecto, consideremos un número dado en representación decimal,

$$d_n...d_1d_0, c_1c_2...c_m$$

la coma , divide a la representación de los dígitos enteros de los decimales, o potencias negativas de 10.

En términos generales,

$$\begin{aligned} d_n...d_1d_0, c_1c_2...c_m &= d_n \times 10^n + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0 \\ &+ c_1 \times 10^{-1} + c_2 \times 10^{-2} + \cdots + c_m \times 10^{-m} \end{aligned}$$

Con lo cual, multiplicando por 10 tenemos

$$\begin{aligned} 10 \times d_n...d_1d_0\,,\, c_1c_2...c_m &= 10 \times \Big(d_n \times 10^n + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0 \\ &+ c_1 \times 10^{-1} + c_2 \times 10^{-2} + \cdots + c_m \times 10^{-m}\Big) \end{aligned}$$

Haciendo la multiplicación en el miembro de la derecha tenemos

$$\begin{aligned} 10 \times d_n...d_1d_0\,,\, c_1c_2...c_m &= d_n \times 10^{n+1} + \cdots + d_1 \times 10^{1+1} + d_0 \times 10^{0+1} \\ &+ c_1 \times 10^{-1+1} + c_2 \times 10^{-2+1} + \cdots + c_m \times 10^{-m+1} \\ &= d_n \times 10^{n+1} + \cdots + d_1 \times 10^2 + d_0 \times 10^1 \\ &+ c_1 \times 10^0 + c_2 \times 10^{-1} + \cdots + c_m \times 10^{-m+1} \\ &= d_n...d_1d_0c_1\,,\, c_2...c_m \end{aligned}$$

Si la parte decimal es finita, multiplicando por 10 tantas veces como dígitos tengamos a la derecha de la coma, contruiremos un número entero. Para el número que analizamos,

$$10^m \times d_n...d_1d_0\,,\, c_1c_2...c_m = d_n...d_1d_0c_1c_2...c_m$$

Lo que significa que el número original lo podemos escribir como el cociente de dos enteros.

$$d_n...d_1d_0\,,\,c_1c_2...c_m = \frac{d_n...d_1d_0c_1c_2...c_m}{10^m}$$

Si un número tiene parte decimal finita es racional

Ejemplo. Trabajando con el número $123,456$ tenemos

$$10^3 \times 123,456 = 1000 \times 123,456 = 123456$$

entonces,

$$123,456 = \frac{123456}{1000}$$

Este es el método de pasar un número decimal con parte decimal finita a fracción, es decir, a la forma en la que fueron definidos los elementos de $\mathbb{Q}$.

Decimales Periódicos

Un número con un número finito de decimales es racional. Eso lo acabamos de comprobar por cómputo directo. Ahora, existen números cuya parte decimal es infinita. Estos números nos son familiar también. El número $0,333333333....$ es la represencación de $\frac{1}{3}$. El número $\pi = 3,141592.....$, también posee infinitos pero no tiene un patrón periódico.

Vamos a usar $\widehat{a}$ para indicar que el dígito a se repite infinitamente. En este caso, $0,\widehat{3} = 0,33333333333....$

Otro ejemplo es $0,\widehat{123} = 0,123123123123....$ Puede ocurrir también que la periodicidad no aparezca seguido a la coma decimal.

Los números que en su representación decimal tienen infinitos decimales periódicos, son racionales..

Veamos algunos casos:

1. Supongamos un número cuya representación decimal sea $0,\widehat{a}$. Llamemos x a este número. Realicemos los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned} x &= 0,\widehat{a} \\ 10 \times x &= a,\widehat{a} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 10 \times x - x &= a,\widehat{a} - 0,\widehat{a} \\ 9x &= a \end{aligned}$$

Si multiplicamos a ambos miembros por el inverso de 9, tenemos

$$x = \frac{a}{9}$$

Ejemplo.

$x = 0,\widehat{4}$

$10x = 4,\widehat{4}$, entonces, $9x = 4$, con lo cual,

$$x = \frac{4}{9}$$

Como $a \in \mathbb{Z}$ (los dígitos son números del 0 al 9, por lo tanto, naturales. Por lo tanto, enteros) tenemos que efectivamente x es racional, ya que se puede escribir como el cociente de dos enteros.

2. Supongamos un número de la forma $0, \widehat{ab}$. en este caso, si el objetivo es restar la parte periódica será necesario multiplicar por 100. Llamemos x a este número. Realicemos los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned} x &= 0, \widehat{ab} \\ 100 \times x &= ab, \widehat{ab} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 100 \times x - x &= ab, \widehat{ab} - 0, \widehat{ab} \\ 99x &= ab \end{aligned}$$

Aplica lo aprendido. Comprueba que

$$0, \widehat{12} = \frac{12}{99}$$

Entonces,

$$x = \frac{ab}{99}$$

3. Finalmente, consideremos un número cuya expresión decimal sea $0, ab\widehat{c} = 0, abccccccccccc...$ Es este caso, para restar la parte periódca deberemos trabajar como sigue. Nuevamente, llamando x al número,

$$\begin{aligned} x &= 0, ab\widehat{c} \\ 100 \times x &= ab, \widehat{c} \\ 1000 \times x &= abc, \widehat{c} \end{aligned}$$

Restando,

$$\begin{aligned} 1000 \times x - 100 \times x &= abc, \widehat{c} - ab, \widehat{c} \\ 900x &= abc - ab \end{aligned}$$

Finalmente,

$$x = \frac{abc - ab}{900}$$

En los ejemplos presentados, todos los números fueron considerados con parte entera nula, así, pasamos a fracción $0, \widehat{a}$, $0, \widehat{ab}$, $0, ab\hat{c}$, etc. Si la parte entera es no nula, para trabajar separamos

$$a, bcd... = a + 0, bcd...$$

Es decir que obtenemos la fracción de la parte decimal y luego sumamos a.

Siempre es mejor que no se deba recordar una *fórmula* cuando se puede razonar. El algoritmo para pasar números con parte decimal infinita periódica a fracción es sencillo y sólo consiste en multiplicar al número en multiplicarlo por 10, 100, 1000, etc de manera tal de restar la parte periódica.

Aplica lo aprendido. Paso a paso, obtiene la expresión como fracción de

$$0, 012\widehat{34}$$

.

Simbolización Matemática

Al incorporarse conceptos, relaciones y operaciones, enriquecemos el *vocabulario matemático*. Consideremos algunos ejemplos.

Simbolicemos las siguientes expresiones,

"1.*Dado un número racional, consideremos el cuadrado de la quinta parte "*
En este caso, podríamos considerar un racional x (sin necesidad de expresarlo como fracción) y obtener lo expresado, es decir,

$$\left(\frac{1}{5} \cdot x\right)^2$$

la quinta parte de una cantidad se obtiene simplemente multiplicando la cantidad en cuestión por $\frac{1}{5}$

"2.*Un entero de dos cifras, divisible por 5 y que la suma de sus dígitos* sea *8"*
Tenemos un número de dos cifras $x = du$ donde d y u son los dígitos (es decir cada número es un entero entre 0 y 9). Entonces, el número en cuestión satisface

$$\begin{aligned} 10d + u &= 5\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z} \\ d + u = 8 & \end{aligned}$$

La primera ecuación establece la relación del propio número con el 5, en el sentido de ser divisible. La segunda, la de que la suma de sus dígitos sea 8.

Este problema admite a 35 como solución, ya que las demás posibilidades para que la suma de dígitos sea ocho son 17, 71, 26, 62, 53, 44 y 80.

"3.*Dada una cantidad, A, ésta sufre un aumento en una cuarta parte."*
Aquí partimos de una cantidad A. La cuarta parte de A será, como vimos, $\frac{1}{4}A$ con lo cual el enunciado se puede expresar como

$$A + \frac{1}{4} \cdot A = A\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

la expresión de la izquierda es la simbolización básica, la que satisface el enunciado, la de la derecha, es trabajada, es decir, donde hemos extraído factor común A para compactar la expresión.

"4*Dada una cierta cantidad a, ésta sufre primero un aumento en una tercera parte y luego sufre un aumento correspondiente a una quinta parte del valor ya aumentado."*
Veamos, en este caso, hay dos etapas bien definidas: la primera un aumento en la cantidad a. La segunda, un aumento en la cantidad b que es la nueva cantidad obtenida a partir del primer aumento. Entonces, tenemos,

- Primera etapa: a se transforma después del aumento enunciado como

$$b = a + \frac{1}{3}a = a\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

- Segunda etapa: b (valor de a ya aumentado en la primera etapa) sufre un aumento correspondiente a la quinta parte, es decir,

$$b + \frac{1}{5}b = b\left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

Entonces, el valor original de a se transforma luego de los dos aumentos sucesivos

$$a \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}_{\textit{por el primer aumento}} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{5}\right)}_{\textit{por el segundo aumento}}$$

Es imposible considerar todos los casos con los que nos podríamos encontrar para simbolizar. Con los ejemplos presentados lo que buscamos es que nos vayamos familiarizando con un método para el análisis.

Es necesario leer detenidamente los enunciados, con cada punto y cada coma, ya que en la correcta lectura estará la correcta simbolización.

Veamos para finalizar dos enunciados similares, en los cuales una mínima diferencia conlleva a simbolizaciones completamente distintas.

1. *La suma de un número entero con su siguiente, al cuadrado"*
2. *La suma de un número entero con su siguiente al cuadrado"*

El uso de la coma establece una diferencia sustancial en la simbolización.

En el primer caso, el resultado será, siendo n el número en cuestión,

$$[n + (n + 1)]^2$$

En el segundo,

$$n + (n + 1)^2$$

Aplicación: Cálculo de Porcentajes

En el ejemplo 3 de simbolización se introdujo la noción de aumento en determinada proporción de una cierta cantidad. Vimos que si una cantidad aumentaba una fracción determinada de la misma, el valor resultante era

$$a\left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

donde $\frac{p}{q}$ era la fracción de la cantidad a en que aumentaba la propia cantidad.

En muchas ocasiones la fracción de una cierta cantidad se establece en *partes de 100*, es decir que las fracciones de la cantidad en cuestión se establecen con denominador 100.

De esta manera, notemos que $\frac{1}{2}$ es que la mitad de uno, es equivalente a $\frac{1 \cdot 50}{2 \cdot 50} = \frac{50}{100}$. El $\frac{50}{100}$ de una cantidad a, calculado a través de

$$\frac{50}{100} \cdot a$$

es la mitad de a y se denomina *50 porciento de* a y también se dice que es el 50% de a.

Decir que queremos calcular el 20% de a debemos hacer $\frac{20}{100} \cdot a$.

Aplica lo aprendido.
Calcula el 25% de 160.

Sea c un número positivo. Consideremos una cantidad que sufre un aumento del c%. Ya hemos trabajado con aumento en fracciones de una cantidad. En este caso, el nuevo valor de a es

$$a + \frac{c}{100}a = a\left(1 + \frac{c}{100}\right)$$

Si en cambio se tratara de un descuento del c%, tendremos

$$a - \frac{c}{100}a = a\left(1 - \frac{c}{100}\right)$$

Consideremos dos aumentos consecutivos de una cantidad en porcentajes c_1% y c_2%, respectivamente. Cuando se trata de aumentos sucesivos se entenderá que el segundo aumento se realiza sobre el valor correspondiente a la cantidad que ya sufrió el primer aumento. Entonces, la cantidad a se transforma luego del primer aumento en

$$a + \frac{c_1}{100}a = a\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)$$

Esta nueva cantidad es la que sufre el segundo aumento, con lo cual, $a + \frac{c_1}{100}a$ es aumentada en $\frac{c_2}{100}$ veces de ese valor, con lo que tenemos que luego del segundo aumento tenemos,

$$\left[a + \frac{c_1}{100}a\right] + \frac{c_2}{100}\left[a + \frac{c_1}{100}a\right]$$

Lo que está entre corchetes puede ser sacado como factor común, de modo que podemos escribir los aumentos consecutivos como

$$a\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)\left(1 + \frac{c_2}{100}\right)$$

Si quisiéramos ver cuál sería el aumento equivalente, es decir el aumento que debería haber subrido para que el resultado sea el mismo que los dos aumentos consecutivos, deberíamos igualar

$$a\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)\left(1 + \frac{c_2}{100}\right) = a\left(1 + \frac{c}{100}\right)$$

Si $a \neq 0$ tenemos que

$$\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)\left(1 + \frac{c_2}{100}\right) = \left(1 + \frac{c}{100}\right)$$

haciendo la distributiva en el lado izquierdo del igual

$$1 + \frac{c_1}{100} + \frac{c_2}{100} + \frac{c_1 \cdot c_2}{100 \cdot 100} = \left(1 + \frac{c}{100}\right)$$

Entonces,

$$\frac{c}{100} = \frac{c_1 + c_2}{100} + \frac{\frac{c_1 \cdot c_2}{100}}{100}$$

entonces,

$$c = c_1 + c_2 + \frac{c_1 \cdot c_2}{100}$$

que no es simplemente la suma de los porcentajes. A partir de estos cálculos, podemos notar que si tenemos dos aumentos consecutivos, el primero del 20% y luego del 50% tendremos que el aumento efectivo será

$$20 + 50 + \frac{20 \cdot 50}{100} = 20 + 50 + 10 = 80$$

es decir, el aumento equivalente es de 80%. Notemos que no es simplemente 70% como si fuera la suma directa, sino que el aumento sucesivo hace que aumente más.

En el caso de los descuentos sucesivos, notemos que dos descuentos sucesivos del 50 % no significa que algo salga gratis, ya que el segundo descuento es sobre la mitad del valor original.

Veamos, del mismo modo que efectuamos aumentos consecutivos, podemos ver que si una cantidad sufre dos descuentos consecutivos el valor final será

$$a\left(1 - \frac{c_1}{100}\right)\left(1 - \frac{c_2}{100}\right)$$

con lo cual, el descuento equivalente lo obtendremos a partir de escribirlo en la forma $a\left(a - \frac{c}{100}\right)$ será

$$1 - \frac{c_1 + c_2}{100} + \frac{\frac{c_1 \cdot c_2}{100}}{100} = 1 - \frac{c}{100}$$

entonces,

$$\frac{c}{100} = \frac{c_1 + c_2}{100} - \frac{\frac{c_1 \cdot c_2}{100}}{100}$$

entonces,

$$c = c_1 + c_2 - \frac{c_1 \cdot c_2}{100}$$

Entonces, dos descuentos consecutivos del 50 % resulta en un descuento efectivo del 75%. Dejamos como ejercicio comprobar esto.

Números Reales

Los Números Irracionales

Cuando estudiamos los números expresados en su representación decimal, esto es, su representación posicional de base 10, consideramos dos tipos de situaciones para la parte decimal

- Parte decimal finita
- Parte decimal infinita, pero periódica

En ambos casos, nos fue posible expresarlos como fracción de dos enteros, también llamada *razón* de enteros.

Cuando analizamos la *densidad* de los números racionales en la recta nos preguntamos si con los racionales podíamos "llenar" la recta, ya que siempre entre dos racionales hay uno, independientemente lo próximo que se encuentren.

Esta propiedad sugiere, y de hecho convenció por mucho tiempo, que con los racionales terminó la construcción de números.

Sin embargo, veamos que ocurre con el número emblemático de Pitágoras, $\sqrt{2}$.

Utilizaremos los conceptos elementales de radicación, mas detalles formales y propiedades las desarrollaremos en este capítulo.

Si suponemos que $\sqrt{2}$ es un número racional debe poder escribirse como un cociente *razón* de dos enteros,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Supongamos que la fracción está escrita en su forma *irreducible*, es decir, que no podemos simplificar más factores en el numerador y en el denominador. Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

con lo que obtenemos que $p^2 = 2\,q^2$. Entonces, p^2 es un número par. Ahora, si el cuadrado de un número es par, es porque el propio número lo es

Comprueba:
p^2 es par $\longleftrightarrow$ p lo es par

Entonces, $p = 2\,k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la última expresión tenemos

$$(2\,k)^2 = 4k^2 = 2q^2 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 = 2k^2$$

Con lo cual, q^2 es par. Entonces, q es par.

Pero si tanto p como q son pares, podríamos haber simplificado en numerador y el denominador, al menos un 2 podríamos haber cancelado.

Esto comprueba que la hipótesis de la racionalidad de $\sqrt{2}$ es falsa.

Y esta comprobación pone de manifieso que los racionales no completan la recta numérica, sino que deja *agujeros*.

De esta manera surjen los números denominados *irracionales*.

Otro ejemplo es el número

$$0,1010010001000010000010000001...$$

que si bien posee un patrón para su construcción (notemos que cada cadena posee un cero más que la anterior antes del 1) no hay ningún tipo de periodicidad en su parte decimal. Tampoco hay finitud en su parte decimal.

Llamemos $\mathbb{I}$ al conjunto de los irracionales.

Estamos en condiciones de definir los Números Reales, $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales es obtenido como

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

No podremos dar una definición por comprensión para los Irracionales, ya que provienen de plantear una negación, no una afirmación.

Radicación

Completaremos nuestro estudio de operaciones con la radicación. A diferencia con las otras 3 operaciones, la obtención de la raíz $n-$ésima de un número es un proceso inverso, ya que no se obtiene a partir de cálculos directos.

Veamos por ejemplo si queremos obtener el número tal que su cuadrado sea 4. Como $a^2 = 4$, $a \cdot a = 4$ entonces $a = 2$ o $a = -2$.

Ahora bien, el 2 o el -2 no fueron producto de un cálculo directo sino de una estimación que luego de calcular el cuadrado y verificar que da 4 se asume como el resultado.

De la misma manera, si queremos saber qué número al cubo es -27, hacemos:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a = -27$$

y junto con la relación de los signos en los productos obtenemos que el único número posible es el -3, ya que $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$. Nuevamente, no hubo un proceso directo de cálculo, sino una estimación con comprobación.

Vamos ahora a definir la operación *radicación*.

$\Diamond$ Existen métodos de cálculo aproximado de raíces que son interesantes y de los cuales veremos algunos más adelante.

> *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Definimos la raíz $n-$ésima de a*
>
> $$b = \sqrt[n]{a}$$
>
> *al número b, tal que*
> $$b^n = a$$

Al número n se lo denomina *índice* de la raíz.

A partir de la definición, tenemos que

1. $\sqrt[2]{16} = 4$, ya que $4^2 = 16$
2. $\sqrt[3]{-125} = -5$, ya que $(-5)^3 = -125$
3. $\sqrt[6]{64} = 2$, ya que $2^6 = 64$

por citar algunos ejemplos.

Para el caso de raíces cuadradas el índice se omite en la notación, esto es

$\sqrt{a}$ es $\sqrt[2]{a}$

Índices pares e impares

En virtud de la regla de los signos, tenemos que

$$(-2) \cdot (-2) = (-2)^2 = 4$$

y en general, tanto para a como para $-a$ tenemos que

$$a^2 = (-a)^2 \geq 0, \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Esta propiedad tiene consecuencias

1. Si $a < 0$, entonces no existe un número real b tal que $b = \sqrt{a}$
2. Si $a > 0$, $\sqrt{a}$ admitiría dos valores como resultados, b o $-b$, si $b^2 = a$

La primera consecuencia nos impone una restricción respecto a cuáles raíces cuadradas existen en el conjunto de los reales.

La segunda, nos obliga a definir cuál valor vamos a considerar como raíz.

Esta ambivalencia de cuadrados, aparece en todas las potencias pares. Veamos, supongamos que comparamos a^m y $(-a)^m$ con m par.

Como m es par, podemos escribirlo como $m = 2 \cdot k$, con $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$a^m = a^{2k} = \left(a^2\right)^k$$

de manera similar obtenemos

$$(-a)^m = (-a)^{2k} = \left[(-a)^2\right]^k$$

y como $a^2 = (-a)^2$ tendremos, para m es par

$$a^m = (-a)^m$$

Con este análisis, definiremos más específicamente la raíz n-ésima de un número real

Raíz de índice par

Dado un número $a \in \mathbb{R}$ positivo y un natural m par. Definimos

$$\sqrt[m]{a}$$

como el número positivo b tal que $b^m = a$.

De esta manera, $\sqrt{16} = 4$ y no ± 4.

El caso de índice impar no precisa ser reformulado, ya que el resultado es unívoco.

La adopción del signo positivo del resultado de una raíz de índice par impide simplificar potencias y raíces del mismo índice que la potencia.

Notemos que

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

ya que el resultado de la raíz es el número positivo. De la misma manera ocurre con otro índice par

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

Esto significa que no podemos considerar como regla, para índice par

$$\sqrt[m]{a^m} = a$$

ya que si a es negativo, no se cumple lo impuesto para el resultado de una raíz. Si a llegara a ser positivo, ahi, los valores coinciden.

Volviendo al caso de raíz cuadrada, tenemos que

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Esto coincide con la definición de valor absoluto de un número real, por lo que en ocasiones se suele ver como definición

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Esta definición es la que se utiliza para la simplificación de una raíz cuadrada con un cuadrado.

La adopción del valor positivo para la raíz de índice par no limita en ningún modo la resolución de ecuaciones del tipo

$$x^2 - a = 0$$

con $a \geq 0$.

Ya que si queremos resolver esta ecuación debemos hacer

$$x^2 = a \;\longrightarrow\; \sqrt{x^2} = \sqrt{a} \;\longrightarrow\; |x| = \sqrt{a}$$

Es decir, los valores posibles para la solución son considerados a partir del valor único de la raíz, considerando el signo $+$ y el signo $-$

Raíz n-ésima como potencia fraccionaria

La definición de raíz está emparentada con una potencia, pero en el sentido inverso: buscamos números tales que si lo elevo al orden de la raíz me da como resultado el radicando.

Ahora, podemos preguntarnos:

- ¿Cómo puedo calcular la raíz de un producto de números?
- ¿Cómo puedo calcular la raíz de una suma de números?
- ¿Qué expresión tendrá una raíz de raíz?, es decir, aplicaciones sucesivas de raíces.
- ¿Es posible expresar en una sola raíz un producto de raíces de igual radicando?

Estas preguntas, por la propia definición, son difíciles de responder ya que no parece ser la definición muy operacional.

Para reformular la raíz, volvamos a la defininción.

$$\sqrt[n]{a} = b \quad si \quad b^n = a$$

Vamos a hacer una suposición y ver qué consecuencias tiene.

Supongamos que $\sqrt[n]{a}$ es una potencia de a. Sea p esta potencia. Lo interesante de suponer una potencia es que le haremos cumplir todas las propiedades válidas para potencias de números.

Entonces, tenemos

$$\sqrt[n]{a} = a^p$$

Pero por la propia definición, se deberá cumplir que

$$(a^p)^n = a$$

Aplicando la propiedad que potencia de potencia se multiplican los exponentes, tenemos

$$a^{p \cdot n} = a = a^1$$

Lo que significa que

$$p \cdot n = 1, \quad entonces, \quad p = \frac{1}{n}$$

Entonces, la raíz es una potencia, fraccionaria.

Definiremos entonces,

- Si n es impar, $\forall a \in \mathbb{R}$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$
- Si n es par, la definición es sólamente para los a positivos, es decir, $\forall a \geq 0$ tenemos
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Con esta asociación de potencia, podemos comprobar las siguientes propiedades

1. Dados dos enteros, m y n, tenemos

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

En efecto, planteando potencia de potencia,

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2.
$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Veamos, si n es par se establece que tanto a como b deben ser positivos.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

3.
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

En efecto,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left[a^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

4.
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

En efecto,
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}}$$

Aplicando potencia de igual base, tenemos

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$$

sumando las fracciones de la potencia,

$$a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

con lo que demostramos la propiedad.

Aplica lo aprendido. Calcula

i) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3}$

ii) $\sqrt[3]{4}\sqrt{4^3}$

iii) $\sqrt[3]{6}\sqrt{2^3}$

Notemos que
$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

por otro lado, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{16} = 4$. De esta manera podemos ver que

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq 3+4 = \sqrt{9}+\sqrt{16}$$

Es decir que

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Aproximación y Estimación de Raíces

»Tema optativo

En ocasiones nos encontramos ante la necesidad de calcular la raíz n-ésima de un número sin una calculadora a mano. Si no tenemos la necesidad de calcularla de manera exacta, nos alcanzará con estimar o aproximar el valor por lo menos para darnos una idea del valor.

La primera estimación *grosera* es la raíz exacta (entera) del entero más cercano. Pero eso no aporta mucho si necesitamos una aproximación mejor.

Las técnicas formales de aproximación serán presentadas en los cursos de Matemática de la carrera.

Una fórmula de aproximación

Supongamos que buscamos conocer el valor numérico de $\sqrt[n]{a}$ y conocemos la raíz n-ésima exacta del entero más proximo (este puede ser mayor o menor, se elije el más próximo). Sea b el entero más próximo del cual $\sqrt[n]{b}$ es un entero.

Si queremos calcular $\sqrt[n]{a}$, lo hacemos mediante

$$\sqrt[n]{a} \approx \sqrt[n]{b} + \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}}(a-b)$$

Notemos que cuanto más próximo sea el entero b de a más aproximado será el valor calculado.

Calculemos por ejemplo $\sqrt{10}$. En este caso $n = 2$ y el entero más próximo es $b = 9$ del cual $\sqrt{9} = 3$. Aplicando la fórmula para la aproximación tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{10} &\approx\ = \sqrt[2]{9} + \frac{1}{2\left(\sqrt[2]{9}\right)^{2-1}}(10-9) = 3 + \frac{1}{2\ (3)^1}(1) = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} \\ &= 3,1\widehat{6} \end{aligned}$$

El valor de calculadora es, a 8 decimales, $\sqrt{10} = 3,16227766$ es decir que la aproximación es bastante buena.

Consideremos otro ejemplo. Aproximemos el valor de $\sqrt[3]{28}$. Notemos que 27 es el entero más próximo para el cual la raíz cúbica es exacta. En este caso tenemos, $n = 3$, $\sqrt[3]{27} = 3$

Aplicando la fórmula para la aproximación tenemos,

$$\sqrt[n]{a} \approx \sqrt[n]{b} + \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}}(a-b)$$

tenemos

$$\sqrt[3]{28} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{27}\right)^{3-1}}(28-27)$$

reemplazando

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{3\ (3)^2} = 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27} = 3,\widehat{037}$$

El valor de calculadora es $\sqrt[3]{28} = 3,036588972$, con 9 decimales.

Si quisiéramos calcular $\sqrt[3]{27,3}$ usamos la misma expresión anterior, ya que el entero más próximo es el 27 con raíz cúbica exacta. Es más, este número está más cerca de 27, por lo que la aproximación debería ser mejor que la correspondiente al ejemplo anterior. Efectivamente, aplicando la fórmula tenemos

$$\sqrt[3]{27,3} \approx 3 + \frac{1}{3\ (3)^2}(0.3) = 3 + \frac{0,3}{27} = 3,0\widehat{1}$$

mientras que el valor de calculadora es $3,011070211$.

Método de aproximaciones sucesivas

El método de aproximaciones sucesivas posee la ventaja con relación a la fórmula presentada anteriormente que el valor estimado va corrigiéndose hasta alcanzar un valor que satisfaga nuestras espectativas de aproximación.

El método consiste en considerar un valor inicial para la estimación de la raíz y generar una *sucesión* de valores que vayan aproximando la raíz deseada. Es decir, que nuevamente es conveniente partir como una primera aproximación a la raíz exacta del entero más próximo.

El problema es entonces obtener $x = \sqrt[n]{a}$

Llamemos x_0 el valor de la raíz n-ésima del entero más próximo. Sean x_1 el primer valor corregido, x_2 el segundo, y así sucesivamente.

El valor corregido será el obtenido a partir de la expresión

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0^n - a)}{n\, x_0^{n-1}}$$

El próximo valor mejorado lo obtenemos sustituyendo x_0 por x_1

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1^n - a)}{n\, x_1^{n-1}}$$

Para el tercero,

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2^n - a)}{n\, x_2^{n-1}}$$

Y así sucesivamente. En general, se escribe la *sucesión*

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1}^n - a)}{n\, x_{k-1}^{n-1}}$$

Calculemos con este esquema la $\sqrt{2}$. En este caso, $a = 2$ y $n = 2$ (índice de la raíz). Comencemos por el entero más próximo de raíz exacta,

$x_0 = 1$ Entonces

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0^n - a)}{n\, x_0^{n-1}} = 1 - \frac{(1^2 - 2)}{2 \cdot 1^{2-1}} = 1 - \frac{(-1)}{2} = 1{,}5$$

Esta aproximación no es muy buena pensando que el valor exacto es $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ El valor mejorado será

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1^2 - 2)}{2\, x_1} = 1{,}5 - \frac{((1{,}5)^2 - 2)}{2 \cdot 1{,}5} = 1{,}5 - 0{,}08\widehat{3} = 1{,}41\widehat{3}$$

Este valor es mejor que el anterior, teniendo en cuenta el valor exacto. El tercer valor mejorado será

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2^2 - 2)}{2\, x_2} = 1{,}41\widehat{3} - \frac{[(1{,}41\widehat{3})^2 - 2]}{2 \cdot 1{,}41\widehat{3}}$$

Realizando el cálculo resulta

$$x_3 = 1{,}414214136$$

¿Cuándo termina el proceso de corrección?

Cuando dos aproximaciones tienen en común un número determinado de decimales iguales -el cual lo definimos *a priori*- podemos afirmar que aproximamos $\sqrt{2}$ con la precisión deseada. Este criterio se denomina *criterio de corte*.

»Fin tema optativo

Racionalización de denominadores

Es común, al trabajar con expresiones de números reales, encontrarnos con fracciones del tipo

$$\frac{c}{a \pm \sqrt{b}}$$

donde c puede ser una expresión y b un real positivo y a una expresión ($a \neq \mp\sqrt{b}$)

En algunas ocasiones, resulta particularmente útil expresar el denominador sin raíces, por lo que debemos realizar operaciones que nos conduzcan a la forma deseada.

★ Racionalizar denominadores no es de manera alguna una obligación. Depende de la operación a simplificar.

Consideremos primero el caso particular en el $a = 0$, es decir, que la expresión tiene la forma $\frac{c}{\sqrt{b}}$.

Si multiplicamos y dividimos la expresión por $\sqrt{b}$ obtenemos,

$$\frac{c}{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{b}$$

De esta manera, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Consideremos ahora el caso

$$\frac{c}{a + \sqrt{b}}, \qquad a \neq 0$$

Para llevar adelante la racionalización multipliquemos y dividamos por la expresión $a-\sqrt{b}$, con $a \neq \sqrt{b}$

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{\left(a+\sqrt{b}\right)} \times \frac{\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)}$$

Expresiones $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$ se denominan *conjugadas*. La primera es la conjugada de la segunda, y viceversa.

Aplicando la propiedad distributiva en el denominador, obtenemos

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

Hemos efectuado la racionalización del denominador.

Se llama diferencia de cuadrados a

$$(a-b)\cdot(a+b) =$$

$$a^2 + a\cdot b - b\cdot a + b^2 = a^2 - b^2$$

De manera análoga se trabaja con la expresión $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$ ($a \neq \sqrt{b}$), sólo que se multiplica y divide por $a+\sqrt{b}$, para $a \neq -\sqrt{b}$ obteniendo,

$$\frac{c}{a-\sqrt{b}} = \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

Notemos que el hecho de que en el denominador aparezca a^2, significa que si a es la raíz cuadrada de un número real positivo, este procedimiento nos elimina la raíz cuadrada que proviene de a.

Dada la expresión

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ obtenemos

$$\frac{c}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{c}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$

Con lo que obtenemos

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-b} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplo. Racionalizar la expresión $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Solución. Multipliquemos y dividamos la expresión dada por $2-\sqrt{3}$,

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

Aplicando la propiedad distributiva en el denominador, obtenemos

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}+2$$

Notación Científica

Como la mayoría de las notaciones propuestas en matemática, la notación científica viene al auxilio de quien hace cuentas con números extremadamente grandes o extremadamente pequeños.

Por ejemplo, supongamos que queremos hacer la siguiente operación:

$$20000000000000000000 \times 1000000000000000000000$$

Podemos notar que no sólo nos puede llevar mucho tiempo, sino que es más critico: podemos confundirnos con tantos y tantos ceros.

Lo mismo ocurriría si nos encontramos con la necesidad de calcular

$$0,0000000000000000000031 \times 0,00000000000000000001$$

Para hacer estas operaciones, vayamos calculando potencias de 10:

$$\begin{aligned}
1 &= 10^0 \\
10 &= 10^1 \\
100 &= 10^2 \\
1000 &= 10^3 \\
\vdots &= \vdots \\
1\underbrace{000\ldots0}_{n \ ceros} &= 10^n
\end{aligned}$$

Esta propiedad elemental, nos sirve de mucha ayuda para tratar con números con muchos ceros, ya que por ejemplo, para la operación en cconsideración

$$20000000000000000000 \times 1000000000000000000000$$

notamos que

$$20000000000000000000 = 2 \times 10000000000000000000$$

Si además contamos la cantidad de ceros, que son 19, este número enorme puede escribirse como

$$20000000000000000000 = 2 \times 10^{19}$$

que como número sigue siendo enorme, pero que su representación es más reducida.

Por otro lado,

$$1000000000000000000000 = 1 \times 10^{21}$$

entonces, volviendo a la operación

$$20000000000000000000 \times 1000000000000000000000 = 2 \times 10^{19} \times 1 \times 10^{21}$$

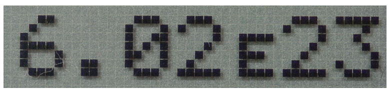
Como el producto es conmutativo y asociativo, tenemos

$$2 \times 10^{19} \times 1 \times 10^{21} = 2 \times 1 \times 10^{19} \times 10^{21}$$

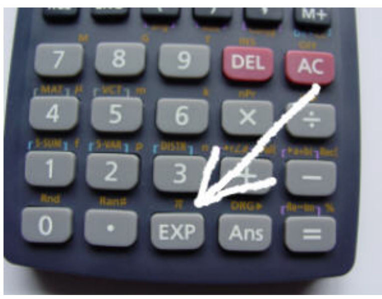
Y como ahora llevamos a producto de potencias de igual base, sumamos los exponentes de los 10. Por lo tanto

$$2 \times 10^{19} \times 1 \times 10^{21} = 2 \times 10^{19+21} = 2 \times 10^{40}$$

Uso de la Calculadora



Cuando en la pantalla de la calculadora aparece esta notación, significa $6,02 \times 10^{23}$. Este es el número conocido como *Número de Avogadro* y está relacionado con la cantidad de moléculas en un mol.



para usar notación científica en la calculadora, debes usar la tecla EXP. Si se desea escribir $2,1 \times 10^8$ debes tipear en la calculadora 2,1 `EXP` 8

Es decir, que hacer la cuenta de esta manera, solo necesitamos sumar exponentes, y no teníamos que hacer el producto, que por cierto podríamos haber cometido errores, debido a la cantidad de ceros.

Algo similar ocurre con números extremandamente pequeños. Para tratar con este tipo de números, tomemos en cuenta que

$$\begin{aligned} 0,1 &= 10^{-1} \\ 0,01 &= 10^{-2} \\ 0,001 &= 10^{-3} \\ 0,0001 &= 10^{-4} \\ \vdots &= \vdots \\ \underbrace{0,0\ldots0}_{n\ ceros}1 &= 10^{-n} \end{aligned}$$

Entonces, para calcular

$$0,0000000000000000000031 \times 0,0000000000000000000001 = \\ 3,1 \times 10^{-21} \times 1 \times 10^{-22}$$

que, ordenando los productos adecuadamente y sumando las potencias de 10, obtenemos:

$$0,0000000000000000000031 \times 0,0000000000000000000001 = 3,1 \times 10^{-43}$$

En esto se basa lo que se denomina notación científica: expresar cualquier número x en la forma

$$x_{notacion\ cientifica} = a \times 10^{n}$$

Donde a debe ser menor que 10, pero que pueda tener parte decimal. Y la potencia de 10 puede ser positiva o negativa.

Todo número puede ser escrito en notación científica, pero no siempre se justifica.

Por ejemplo, $121 = 1,21 \times 10^2$. En este caso, la notación científica no es de gran ayuda.

Notación de intervalos. Representación en la Recta Numérica

Finalmente, vamos a denotar subconjuntos de $\mathbb{R}$ en una notación denominada *intervalos* que será de utilidad para estudiar uniones e intersecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de una manera gráfica en la recta numérica.

Consideremos el subconjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\}$$

Este conjunto es el subconjunto de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son aquellos que son mayores estrictos que 1 y menores estrictos que 5. Es decir que ni 1 ni 5 pertenecen a A. Notemos que este conjunto no tiene definido el número más pequeño como tampoco tiene definido el número mayor. Este tipo de conjuntos se los denominan *abiertos*.

Consideremos ahora, el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 8\}$$

Este conjunto es el subconjunto de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son aquellos que son mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 8. Con lo cual, -2 y 8 están en el conjunto. En este caso, -2 es el más pequeño de los elementos y 8 es el mayor de todos los elementos de B. Este tipo de conjuntos son denominados *cerrados*.

Para denotar el primer conjunto, usaremos paréntesis que indicarán que los extremos no pertenecen al conjunto. Para el segundo, usaremos corchetes que indicarán que los extremos pertenecen.

Es decir,

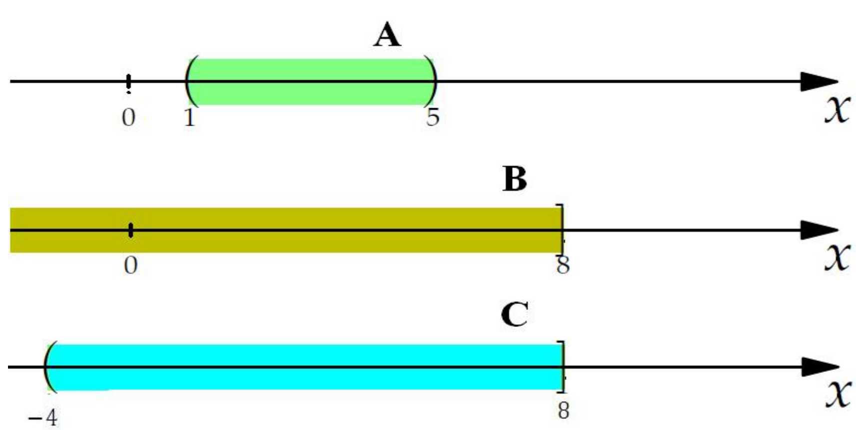
$$A = (1, 5) \qquad B = [-2, 8]$$

El conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 8\}$$

será semicerrado (o semiabierto, no es tan importante esta denominación). Lo que realmente importa es que este conjunto tiene un elemento que es mayor que todos, pero no tiene un elemento que podríamos decir que es el menor.

Gráficamente,



Pintar de esta manera los intervalos ayuda para visualizar operaciones entre conjuntos.

Veamos el siguiente ejemplo.

Consideremos A y B los conjuntos definidos como

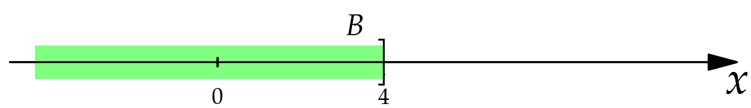
$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 1\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 4\} \end{aligned}$$

En notación de intervalos, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= (1, +\infty) \\ B &= (-\infty, 4] \end{aligned}$$

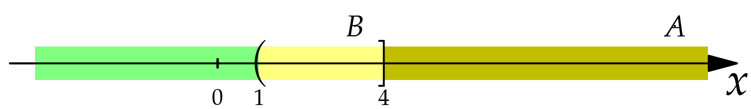
Un intervalo en el cual uno de los extremos sea $+\infty$ o $-\infty$ no puede ser cerrado en ese extremo.

Gráficamente, tendremos



Si quisiéramos obtener gráficamente el conjunto $A \cap B$ superpongamos ambos gráficos y donde se ”solapan” los gráficos será la intersección.

En este caso, superpongamos primero los gráficos



Con color amarillo simbolizamos la superposición de los intervalos. Por lo cual, podemos afirmar que

$$A \cap B = (1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 < x \leq 4\}$$

Ejercicios de la Parte I

1. Dados los conjuntos por extensión, escribirlos por comprensión

a) A = {1, 3, 5, 7, 9}

b) B = {0, 2, 4, 6, 8, 10}

c) C = {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64},

d) D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . }

2. Dados los siguientes conjuntos

A = {2, 4, 6, 8, 10, 11, 13}, B = {1, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 15} y C = {x ∈ N /x impar y múltiplo de 5}

Hallar:

a) A ∪ B b) A ∩ B c) B ∩ C d) A ∩ (B ∪ C) e) B ∩ (A ∩ C)

3. Enuncia las propiedades que satisfacen las operaciones suma y producto en los siguientes conjuntos numéricos. En cada caso, reflexiona acerca de la existencia de opuestos e inversos.

a) Naturales (N)

b) Enteros (Z)

c) Racionales (Q)

d) Reales (R)

4. Simboliza matemáticamente los siguientes enunciados

a) m es un número par

b) m es un número impar

c) m es la suma de un número par con otro número par.

d) m es el producto de un número par con otro número impar

e) m es la suma de un número par con otro número impar

f) m es el producto de dos impares

g) m es el producto de dos pares

5. Calcula aplicando la propiedad distributiva

a) 3 · (2 + 3) b) (5+3) · (2 + 7) c) (a + b) · (a + b)

d) (a + b + c) · (a + b + c) e) (a - b) · (a - b) f) (a + b) · (a - b)

g) $(a + b)^3=(a + b) \cdot (a + b)^2$

6. Aplica el algoritmo de la división para conocer el cociente y el resto de las siguientes divisiones

a) 9 por 4 b) 9 por 3 c) 4 por 9 d) -19 por 4

e) 17 por -3 f) -134 por -5

7. Simboliza matemáticamente los siguientes enunciados y determina si es posible la paridad del numero m.

a) m es la suma de un múltiplo de 5 con un múltiplo de 7.

b) m es la diferencia entre el cubo de un múltiplo de 3 y los cuadrados de un múltiplo de 5.

c) m es la suma de dos números impares.

d) *m* es el cubo de la suma de dos números pares consecutivos

8. Determina la paridad si es posible de

a) Un número que se obtiene a partir de la suma de dos números pares.

b) Un número que se obtiene a partir del producto de dos números impares.

c) El cuadrado de un número par

d) El cuadrado de un número impar.

9. Determina la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando tu respuesta.

a) La suma entre un múltiplo de 8 y un múltiplo de 4 es un número par.

b) La diferencia entre el cuadrado de un múltiplo de 10 y el cubo de un múltiplo de 2 es siempre múltiplo de 4.

c) La suma de un múltiplo de 10 con un múltiplo de 25 es siempre múltiplo de 15.

d) Si n es par entonces $4n + 24$ es múltiplo de 8.

e) Si n es un múltiplo de 3, entonces $2(n + 1)^2 + 4(n + 1)$ es múltiplo de 6

f) Si n es impar entonces $n^2 - 3n + 8$ es impar.

10. Consulta y escribe las expresiones para:

a) La superficie y el perímetro de un cuadrado de lado L.

b) La superficie y el perímetro de un rectángulo de base a y altura b

c) La superficie y el perímetro de una circunferencia de radio r

d) La superficie lateral y el volumen de un cubo de lado L.

e) La superficie y el volumen de una esfera de radio r.

f) La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, de lados iguales L.

g) El área de un triángulo rectángulo de altura h y base b.

h) El área de un triángulo no rectángulo de altura h y base b.

i) Escribe el área de un cuadrado en función de su diagonal.

j) Escribe la expresión del área de un círculo en función de su perímetro.

11. Determina la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando tu respuesta

a) Si el lado de un cuadrado se triplica, su perímetro también.

b) Si el lado de un cuadrado se triplica, su área aumenta 8 veces.

c) El perímetro de un cuadrado se duplica si su diagonal se duplica.

d) El perímetro de una circunferencia se duplica si su área se multiplica por 6.

12. Simboliza matemáticamente los siguientes enunciados. En cada caso, determina si el resultado es un número entero.

a) *m* se obtiene a partir de multiplicar tres enteros consecutivos.

b) Dado $m \in \mathbb{Z}$ obtiene la suma del cubo de su anterior con el triple del cuadrado de su siguiente.

c) El número *m* es tal que la diferencia entre el cubo de su siguiente con su anterior es un múltiplo de 4.

d) *m* es un número que se obtiene a partir de sumar un múltiplo del cuadrado de 3 con el cubo de un múltiplo de 2.

13. Escribe las expresiones correspondientes a las siguientes situaciones

a) Un padre tiene hoy el triple que la edad de su hijo. Escribe cual será la suma de la edad del padre y la del hijo dentro de 7 años, en función de la edad actual del hijo.

b) Sea un número natural n tal que $9 < n < 100$ del que se sabe que el dígito de las decenas es el doble que el de las unidades, menos 1. Escribe cual es el valor de la suma del cuadrado de los dígitos, en función de las unidades.

c) En una empresa trabajan empleados divididos en dos oficinas. Si en una oficina trabajan cuatro empleados menos que el triple de la otra, escribe cual es el número correspondiente a la suma de los cuadrados de la cantidad de empleados en cada oficina, si de la oficina más poblada pasan 3 empleados para la otra. Expresa en función de la cantidad de empleados de la oficina más poblada.

d) Se desea construir una caja de cartón sin tapa. La base es un rectángulo cuyo lado mayor es 3 cm más grande que el doble del lado menor. La altura es 2 cm menos que el lado menor. Escribe la expresión que representa la superficie total de cartón a utilizar, en función del lado menor.

14. Escribe la definición del conjunto de los números racionales, dando al menos 5 ejemplos.

15. Determina si los siguientes números son racionales. Aquellos que lo sean escríbelos como cociente de dos números enteros.

a) $0,25$ b) $0,\hat{1}$ c) $0,00\hat{3}$ d) $0,0\widehat{12}3$

e) $0,1011011101111011111\ldots$ f) $2,01\hat{9}$

16. Ubica a los números 1 y 7 sobre la recta numérica.

a) ¿Cuál es el punto medio? Ubícalo en la recta.
b) Encuentra el punto medio entre 1 y 7/2. ¿Este es un número racional? Ubícalo en la recta.
c) Encuentra el punto medio entre 9/4 y 7/2. ¿Este es un número racional? Ubícalo en la recta.
d) Encuentra el punto medio entre 9/4 y 23/8. ¿Este es un número racional? Ubícalo en la recta.
e) ¿Podrías continuar este procedimiento? ¿Cuantas veces?

17. Trabajando con números fraccionarios, ordena de forma creciente los siguientes números. Justifica.

a) $-\frac{7}{4}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ -1\ ;\ 2\ ;\ \frac{5}{3}$ b) $\frac{4}{33}\ ;\ 0,\widehat{33}\ ;\ \frac{12}{97}$ c) $2{,}4\hat{9}\ ;\ -\frac{49}{20}\ ;\ \frac{67}{26}$

18. Calcula

a) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{(3+2)}+\frac{3+2}{5}$ c) $\frac{5\cdot 3}{(3+2)}+\left(\frac{3+2}{5}\right):\frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}$ e) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$ f) $\frac{3-\frac{8}{4}\left(1-\frac{3}{16}\right)}{\frac{1}{2}-4\left(3-\frac{3}{32}\right)}+2$

g) $\frac{2-4\left(3+\frac{5}{2}\right)}{3{,}5-\frac{3}{4}(8-6)}$ h) $\left\{\frac{\frac{3}{2}\left[3-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]}{-3+(-1)^{-5}}\right\}^{-1}+\frac{(-2)\frac{1-\frac{5}{4}}{0{,}41\hat{6}-0{,}1\hat{6}}}{\frac{2}{7}-\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}}:\left[\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}-(-5)^{-2}}{1-\frac{2}{7}}\right]$

19. Considera una cierta cantidad A. Escribe las expresiones correspondientes a las siguientes situaciones

a) B es la mitad de A

b) B es la tercera parte de A, más 5.

c) B es el 25 % del triple de A

d) B se obtiene a partir de A adicionando un 30 %

e) B se obtiene a partir de A aumentado en un 10 % primero y un 20 % después.

f) B se obtiene a partir de A restando un 30 %

g) B se obtiene a partir de A restando en un 10 % primero y un 20 % después.

h) B es un aumento repetido tres veces del 10 % de A

i) B es un aumento repetido en n veces del 10 % de A.

20. Escribe las expresiones correspondientes a las siguientes situaciones problemáticas

a) En la vida diaria expresamos el termino concentración o pureza para distinguir la relación que existe entre la cantidad que hay de una sustancia en un volumen (concentración de jugo = cantidad de jugo sobre la cantidad total de líquido de la jarra) o en una masa (pureza del oro = cantidad de oro sobre el peso del lingote). Escribe las expresiones correspondientes a:

i) la concentración de 250 ml de jugo en una jarra de un litro.

ii) la concentración alcohol que hay en una botella de vino de 750 ml, si se sabe que contiene 140 ml de alcohol.

iii) la cantidad de oro que posee un lingote de un kilo de 20% de pureza.

b) Existen ciertas magnitudes que se expresan por unidad de tiempo; por ejemplo la velocidad, o el trabajo por unidad de tiempo. Rápidamente podemos asociar esto al trabajo que realiza una persona en un tiempo determinado. Por ejemplo el trabajo de pintar una pared, lo expresamos como $T=\frac{w}{t}$, donde w es la cantidad de la pared pintada y t el tiempo que tardó en realizarlo.

i) Expresar el tiempo que tardan dos personas en pintar juntas una pared, si una de ellas sola demora 2 hs y la otra 2.5 hs.

c) Si ahora hablamos de una canilla que tarda un tiempo determinado en llenar una piscina, esta magnitud se conoce como caudal y lo expresamos como V/t, donde V es el volumen de la piscina y t el tiempo que tardo en llenarla. Si hay tres canillas que demoran diferentes tiempos t_1, t_2, t_3 en llenar la piscina de volumen V, el tiempo t que tardan las 3 juntas cumplirá que:

$$\frac{\mathrm{V}}{t}=\frac{\mathrm{V}}{t_1}+\frac{\mathrm{V}}{t_2}+\frac{\mathrm{V}}{t_3}$$

Sí ahora abrimos una rejilla que vacía la piscina en un tiempo t_4 tenemos

$$\frac{\mathrm{V}}{t}=\frac{\mathrm{V}}{t_1}+\frac{\mathrm{V}}{t_2}+\frac{\mathrm{V}}{t_3}-\frac{\mathrm{V}}{t_4}$$

Escribe las expresiones correspondientes a:

i) el tiempo que tarda una piscina en llenarse por una canilla que tardaría 4 horas en llenarla trabajando sola, y se deja abierta la rejilla de vaciado que demora 6 horas en vaciarla.

ii) una piscina que tarda tres horas en llenarse utilizando dos canillas con el mismo caudal.

21. Considera los números reales a y b. Sean n y m números naturales. Resuelva e indica que propiedad ha utilizado

a) $a^n \cdot a^m =$ b) $a^n \cdot b^n =$ c) $(a \cdot b)^n =$ d) $a^{-n} =$

e) $\frac{a^n}{a^m} =$ f) $\frac{a^n}{b^n}=$ g)$(a^n)^m =$ h) $a^{n/m} =$

i) $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$ j)$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) =$

22. Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifica en el caso de veracidad y da un contraejemplo para justificar la falsedad.

a) $\sqrt[4]{16} = 2 \quad ya\ que\ 2^4 = 16$

b) $\sqrt[n]{(-4)^n} = -4$ con n par

c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

d) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n+m}}$

e) $\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2.3$

f) $5 \cdot (\sqrt[12]{5^7})^{-1} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^5}}$

23. Elimina mediante racionalización las raíces de los denominadores

a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{13}{\sqrt{11}-2}$

d) $\frac{\sqrt{28}+\sqrt{7}}{\sqrt{28}-\sqrt{7}}$ e) $\frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$ f) $\frac{n}{1-\sqrt{n+1}}$

24. Calcula

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[6]{4}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{0{,}25}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \left(0,\widehat{39} \cdot \frac{11}{11+2}\right)^{1/3} \cdot \sqrt[3]{9}$

c) $\sqrt[3]{0{,}027} \cdot (0{,}81)^{-1/2} + \frac{1}{2+\sqrt{(-1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}16}{\frac{1}{25}}}$

d) $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

f) $\frac{1{,}94-\sqrt[3]{(-1)^5}-\left(\frac{50}{27}\right)^{-1}}{\frac{\sqrt{24\sqrt{2}}}{\sqrt{75}}}$

25. Aplicando propiedades de la potencia muestra que

a) $(90 \cdot 3^{2n} + 12 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+2}) \cdot \left(\frac{3^{-(n+1)}}{4}\right)^2 - 1 = 0$

b) $2 - (5 \cdot 4^{3n+4} + 5 \cdot 4^{3n+3} + 8 \cdot 4^{3n+2}) \cdot \left(\frac{4^{-(n+1)}}{3}\right)^3 = 1$

c) $\sqrt[3]{(7^{3n+9} + 42 \cdot 7^{3n+8} + 49 \cdot 7^{3n+7})} \cdot \left(\frac{7^6}{2 \cdot 7^{n+9}}\right) + 1 = 2$

26. Resuelve

a) $\frac{\sqrt{44}+\sqrt{11}}{\sqrt{44}-\sqrt{11}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1{,}0\widehat{2}-\frac{26}{45}}}{\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{6}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}}}$

b) $\frac{\left(1{,}9\widehat{4}-\sqrt[3]{(-1)^7}-\left(\frac{18}{23}\right)^{-1}\right)^{-2}}{\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}\sqrt{75}}} + \sqrt{2,\widehat{12} + \frac{62}{33}}$

c) $\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{11}-1)} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}} + \left[\left(1+\sqrt{20}\right)^2 - \sqrt{80}\right] \cdot 0,\widehat{3}$

d) $\sqrt{(6 \cdot 5^{n-1} + 20 \cdot 5^{n-2} - 25 \cdot 5^{n-3}) \div \frac{5^{n+1}}{5^2}}$

27. Problemas

a) Un depósito de base cuadrada está lleno de cereal. El lado de la base mide 5m. y la altura es los 8/5 del lado de la base. Un día se retira el 15% del grano y a la semana siguiente se retira otro 10% de grano restante. ¿Cuántos m^3 de grano quedaron? ¿Qué porcentaje del depósito quedó vacío?

b) Calcula el volumen de goma de una pelota de radio interior 5 cm con un espesor de 5 milímetros.

c) Un producto sufre dos aumentos consecutivos del 5% y del 10% respectivamente. Luego sufre un descuento del 12 %. ¿En cuánto se modificó el valor original? ¿Cuál es el porcentaje de aumento que sufrió?

d) ¿Cuál es el costo final de una moto de 9000 dólares si se otorga un descuento del 5% y se le aplica el 9% de impuestos a las ventas? ¿El aumento que tuvo la moto fue del 4%?

e) ¿En cuánto aumenta el área de un rectángulo cuyos lados miden 12 m. y 4 m. si se aumentan ambos lados en un 25%?

f) Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 8. ¿Cómo se expresa esa relación matemáticamente?

g) Al comenzar el año Luis tenía 2940 pesos ahorrados. En enero se fue de vacaciones y gastó la tercera parte. En febrero 1/5 de lo que le quedaba lo utilizó para comprarse ropa, y en marzo gastó los 3/4 remanentes en libros para la facultad. ¿Cuánto dinero le sobró a Luis?

h) Si la base de un rectángulo disminuye un 60% y la altura aumenta en un 150%, ¿varía la superficie?

Parte II

Ecuaciones Polinómicas y Fraccionarias

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas

Las incógnitas, representadas por letras, constituyen los valores que se pretenden hallar.

Por ejemplo, en la ecuación:

$$\overbrace{3x - 2}^{\text{primer miembro}} = \overbrace{13}^{\text{segundo miembro}}$$

la variable x representa la incógnita, mientras que el coeficiente 3 y los números 2 y 13 son constantes conocidas.

El objetivo será entonces determinar el o los valores de x, si es que existen, para los cuales la igualdad se cumple. Estos valores hallados se llamaran soluciones de la ecuación.

Resolver una ecuación significa hallar todas sus soluciones. Llamaremos conjunto solución de la ecuación al conjunto formado por todas sus soluciones y lo denotaremos S.

◊ $x = 5$ es solución de la ecuación

$$3x - 2 = 13$$

porque al sustituir por 5 la igualdad se satisface,

$$3 \cdot 5 - 2 = 13.$$

Resolver una ecuación implica encontrar <u>todas</u> las soluciones. Por ejemplo, $x = 1$ es solución de

$$x^2 - 1 = 0$$

pero no es la única, ya que $x = -1$ también verifica la igualdad.

Ecuaciones Polinómicas

> Las ecuaciones polinómicas tienen la forma
> $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ con $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$
> $a_n \neq 0$

$2x^2 - x + 8 = 0$, $x^5 + 9x^3 = 3x - 4$ son ejemplos de este tipo de ecuaciones. En la primera $a_0 = 8$, $a_1 = -1$ y $a_2 = 2$. La segunda ecuación puede escribirse como $4 - 3x + 9x^3 + x^5 = 0$ y entonces tenemos $a_0 = 4$, $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 9$, $a_4 = 0$ y $a_5 = 1$.

Veamos cómo pueden resolverse algunas ecuaciones polinómicas

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman ecuaciones equivalentes. Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación equivalente que sea más simple, donde la variable se encuentre ”sola” en uno de los lados de la igualdad.

Para resolver una ecuación polinómica las propiedades que aplicamos son

★ Aplicar estas propiedades requiere que efectuemos la misma operación en ambos miembros de una ecuación cuando la resolvamos. Por lo tanto, al decir ”se suma 2” al resolver una ecuación, lo que realmente queremos decir es ”sumamos 2 a cada miembro de la ecuación”.

Propiedad	Descripción
$A = B \Longleftrightarrow A + C = B + C$	Sumando una misma cantidad a ambos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente
$A = B \Longleftrightarrow k \cdot A = k \cdot B, k \neq 0$	Multiplicando a ambos miembros de una ecuación por un número no nulo se obtiene una ecuación equivalente

A, B y C son expresiones del tipo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ y el símbolo ”$\Longleftrightarrow$” significa ”equivale a”.

Aplicamos a continuación las propiedades anteriores para resolver la ecuación:

$$3x - 2 = 13$$

Sumando a ambos miembros 2

$$3x - 2 + 2 = 13 + 2$$

$$3x = 15$$

◊ Observemos que la aplicación de estas propiedades equivalen al proceso que conocemos comúnmente como ”pasaje de términos”.

Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{3}$ obtenemos

$$\frac{1}{3}(3\,x) = \frac{1}{3}(15)$$

de donde

$$x = 5 \qquad \text{entonces } \mathrm{S} = \{5\}$$

En este curso estudiaremos principalmente las ecuaciones polinómicas.

Ecuación Lineal

Es una ecuación polinómica en la cual $n = 1$. Entonces definimos:

> Una ecuación lineal en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma
> $$ax + b = 0 \qquad\qquad a_n \neq 0$$
> donde a y b son números reales y x es la variable.

Para resolverlas usamos exclusivamente las dos propiedades anteriores para ecuaciones equivalentes y las propiedades de las operaciones con números reales.

Como $a \neq 0$, la ecuación es:

$$ax + b = 0$$

sumando $-b$ a ambos miembros:

$$ax = -b$$

multiplicando a ambos miembros por $1/a$

$$x = -b/a$$

Por lo que el conjunto solución de esta ecuación es $S = \{-b/a\}$

◊ Para resolver la ecuación
$6(x - {}^{1}{}_{2}) = 2x - 1$

$$\begin{aligned} 6(x - \frac{1}{2}) &= 2x - 1 \\ 6x - 3 &= 2x - 1 \\ 6x - 3 + 3 &= 2x - 1 + 3 \\ 6x &= 2x + 2 \\ 6x - 2x &= 2x + 2 - 2x \\ 4x &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es claro que, en este caso, $S = \{\frac{1}{2}\}$

Si $a = 0$, nos queda una igualdad numérica de la forma b=0. Esta igualdad puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de b.

$$0x + b = 0$$

• En el caso que b sea igual a 0, la igualdad es verdadera y se satisface para cualquier valor de x. Decimos entonces que el conjunto solución S son todos los números reales, es decir S=R

• En el caso que b sea distinto de 0, la igualdad es falsa y la ecuación no se satisface para ningún valor de x. Decimos entonces que el conjunto solución S es vacío, es decir S={ }= ∅

◊ Para resolver la ecuación
$2(x+1) = 2x + 4$

$2x+2 = 2x + 4$

$2x+2x = 4 - 2$

$0 = 2 \rightarrow$ absurdo

S={ }= ∅

Ecuación cuadrática (o de 2° grado)

Es una ecuación polinómica en la cual $n = 2$, entonces definimos:

Las ecuaciones cuadráticas con una incógnita son ecuaciones de la forma
$ax^2 + bx + c = 0$
con a $\neq 0$ ó cualquier otra equivalente a ella.
(Si $a = 0$, la ecuación sería lineal)

Podemos ver que

$$3x^2 = x + 1,$$

$$x^2 + 3 = 0$$

son ejemplos de este tipo de ecuaciones.

Algunas ecuaciones de segundo grado de fácil resolución

Caso 1. Falta el término en x (x tiene coeficiente 0)

La ecuación es de la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Luego,

$$ax^2 = -c$$

Y entonces:

$$x^2 = -c/a$$

Para resolver

$$2x^2 - 8 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$S = \{-2, 2\}$$

Por lo tanto se presentan dos situaciones posibles que tienen que ver con el signo de $-c/a$

Caso 1 i

Si a y c tienen el diferente signo, entonces, la ecuación tiene exactamente dos soluciones, ya que $-c/a > 0$ Las soluciones son:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Caso 1 ii

Si a y c tienen el mismo signo, entonces, la ecuación no tiene solución, ya que $-c/a < 0$.

Caso 2. Falta el término independiente

La ecuación es de la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Por ejemplo:

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$S = \{0, 3\}$

Una ecuación equivalente es: $x(ax+b) = 0$ cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$ (pues el producto de los factores x y $ax + b$ es cero si y sólo si si alguno de ellos lo es).

Caso 3. La ecuación está escrita en la forma $(x+\alpha)^2 + \beta = 0$

En el caso de tener que resolver la ecuación

$$(x+\alpha)^2 + \beta = 0$$

hacemos

$$(x+\alpha)^2 = -\beta$$

$$(x+\alpha) = \pm\sqrt{-\beta}$$

$$x = -\alpha \pm \sqrt{-\beta}$$

Claramente, del signo de β dependerá la existencia de soluciones reales o no:

- Si $\beta > 0$, la ecuación no admite solución real.
- Si $\beta < 0$, la ecuación admite dos soluciones reales distintas.
- Si $\beta = 0$, la ecuación admite una única solución real, $x = -\alpha$.

Caso 4. Todos los coeficientes de la ecuación cuadrática son no nulos

Dada la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

multiplicando a ambos miembros por $1/a$ y sumando $-c/a$ a ambos miembros, obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

sumando ahora $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ a ambos miembros de la ecuación, se obtiene un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

y ahora, operando, obtenemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (*)$$

◊ Las operaciones que hemos hecho, llevamos la ecuación original a la ecuación $(*)$, que es de la forma **caso 3**.

de donde

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

sumando $-\frac{b}{2a}$ a ambos miembros, obtenemos

◊ Esta formula es conocida como la ecuación de ***bhaskara***

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

◊ Seguramente conoces y recuerdas bien esta expresión para las soluciones de la ecuación cuadrática. Lo importante de hacer este desarrollo es que sepas ahora que no es necesario recordarla de memoria para hallar tales soluciones. El procedimiento que nos permitió escribir la ecuación dada en la forma (*) se conoce como completación de cuadrados. Queda en claro que, usando la completación de cuadrados, podés resolver cualquier ecuación de Segundo grado, en forma sencilla y usando las propiedades conocidas.

Esta manera de escribir la solución significa que tenemos, en principio, dos soluciones,

- Calculando con el signo $+$ la solución

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Calculando la solución con el signo $-$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El rol del discriminante

Analizando la solución general de la ecuación cuadrática,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

notamos que

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

juega un papel fundamental en el cálculo de la solución, ya de la posibilidad de calcular esta raíz dependerá la existencia o no de soluciones reales.

En efecto, como vimos en la primera parte, no existe un número real que sea raíz cuadrada de un número negativo.

Es claro que habrá soluciones reales siempre y cuando

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \geq 0$$

Es por esto que el signo Δ *discrimina* entre los tipos de soluciones:

- **a)** Para

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

no existe solución real

- **b)** Para
$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$
La solución
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
se transforma en
$$x = -\frac{b}{2a}$$
es decir, que posee una única solución.

◊ El caso de única solución es a veces identificado como *con dos soluciones coincidentes*. Esta denominación es de mayor aplicabilidad en factorización de polinomios.

- **c)** Para
$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$
La solución
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
arroja dos soluciones distintas, una correspondiente a
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
y la
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Completación de cuadrados

Al resolver la ecuación cuadrática general, comenzamos por la ecuación completa
$$ax^2 + bx + c = 0$$
y mediante operaciones habíamos llegado a
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
Es justo por haber llegado a esta ecuación es que podemos ”despejar” la incógnita. El procedimiento que se llevó a cabo para cumplir el objetivo es conocido como *completación de cuadrados*.

A partir de los siguientes ejemplos vamos a establecer una manera general de completar cuadrados.

Consideremos inicialmente la siguiente expresión
$$E = x^2 + 2x.$$

El objetivo es reescribir E de manera tal de que el número indeterminado x aparezca en un solo término, y no en dos como aparece originalmente.

Reescribir E significa hacer operaciones en el lado derecho de la igualdad, pero de tal forma que no altere el valor de E.

◊ Sumar 0 en el contexto de trabajar con ecuaciones y reescrituras no es simplemente poner $+0$, sino $a-a$ que es 0, pero de manera más sofisticada.
Del mismo modo, multiplicar por 1, se puede hacer de manera más sofisticada haciendo $\cdot\frac{a}{a}$, con $a \neq 0$. Estará en la buena elección de a la completación exitosa de cuadrados o no.

Esto significa que las opciones que tenemos son multiplicar por 1 o sumar 0, o combinaciones de ambas.

Volviendo a E y sumando cero

$$E = x^2 + 2x + \underbrace{a - a}_{0}$$

Notemos que si $a = 1$, tenemos

$$E = x^2 + 2x + 1 - 1$$

En este caso, la elección de $a = 1$ es exitosa, puesto que

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

.

Finalmente, pudimos escribir a E en la forma buscada,

$$E = (x+1)^2 - 1$$

★ Siempre verificar si lo obtenido es la expresión original. En este caso,

$$(x+1)^2 - 1 = (x^2+2x+1) - 1 = x^2 + 2x$$

Es claro que la elección del número a sumar y restar no es arbitraria: sumaremos y restaremos un número que complete un trinomio cuadrado perfecto.

Si por ejemplo, la expresión hubiese sido

$$F = x^2 + 3x$$

que hubiera sido conveniente sumar y restar?

Veamos si podemos establecer un esquema general.

Para ello, recordemos las expresiones del binomio elevado al cuadrado

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Entonces, a partir de una expresión

$$F = x^2 + mx$$

observamos que

- Debemos sumar y restar término que sea el cuadrado de una expresión, a. Es decir, debemos sumar y restar a^2
- Esta expresión debe ser tal que el coeficiente de x sea el doble de a

con lo cual,

$$2a = m$$
$$a = \frac{m}{2}$$

Entonces, sabemos que debemos sumar y restar:

$$F = x^2 + mx = x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Entonces, la expresión F queda escrita en la forma que buscábamos

$$F = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

En el primer ejemplo $x^2 + 2x$, tenemos que $m = 2$, con lo que debemos sumar la mitad de 2, 1, elevado al cuadrado, por lo que sumamos y restamos uno.

Retomando el ejemplo planteado. Reescribamos completando cuadrados la expresión

$$F = x^2 + 3x$$

. En este caso, debería sumar y restar el cuadrado de la mitad de 3. Es decir, debo hacer

$$F = \underbrace{x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{(x+\frac{3}{2})^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Vemos que lo que debo sumar y restar no proviene de la imaginación, sino de que aparezcan los términos del trinomio cuadrado perfecto.

Finalmente, consiferemos la expresión

$$x^2 - \frac{7}{3}x$$

notemos que para completar cuadrados hacemos

$$\underbrace{x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2}_{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2} - \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

Cada problema puede plantearse particularmente y buscar, a partir de las condiciones, cuál debe ser.

También, podemos sistematizar el resultado y tener que

$$\boxed{x^2 + m\,x = \left(x + \tfrac{m}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{m}{2}\right)^2}$$

Consideremos por último la expresión $x^2 + 4x + 1$, esta expresión puede escribirse

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3$$

Realizada de la manera "sistemática" podríamos haber hecho

$$x^2 + 4x + 1 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 1 = (x + 2)^2 - 3$$

Ecuaciones de ”tipo cuadrático”

Ciertas ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones cuadráticas por medio de una adecuada sustitución.

En particular, una ecuación bicuadrada es una ecuación que se puede expresar en la forma
$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$
donde a, b y c son tres números reales, $a \neq 0$.

Para resolver una ecuación bicuadrada hacemos el cambio de variable $x^2 = u$, por lo tanto, $x^4 = u^2$

La ecuación expresada en función de u es:
$$au^2 + bu + c = 0.$$

Una vez resuelta esta ecuación sustituiremos sus soluciones en $x^2 = u$, obteniéndose así las soluciones de la ecuación en x.

Por ejemplo resolvamos:
$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Aplica lo aprendido.
Resuelve
a) $x^4 - 7x^2 - 9 = 0$
b) $x^4 + 11x^2 + 18 = 0$

Para pensar:
1. Que conclusión obtendrías respecto a la cantidad de raíces reales que tiene una ecuación del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con a y b no nulos.
2. Qué cambio de variable harías para resolver $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$? Encuentra su conjunto solución

Hacemos el cambio de variable $x^2 = u$, obteniendo la ecuación
$$u^2 - 10u + 9 = 0$$
Las soluciones de esta ecuación son $u = 9$ ó $u = 1$.

Si $u = 9$ entonces $x^2 = 9$ de donde $x = 3$ ó $x = -3$.

Si $u = 1$ entonces $x^2 = 1$ de donde $x = 1$ ó $x = -1$.

Concluimos entonces que el conjunto solución de $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ es $S = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Vamos a resolver ahora otra ecuación, donde aplicaremos también una sustitución conveniente para encontrar sus soluciones.

La ecuación es
$$x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0$$
que la podemos reescribir como
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 4\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 5 = 0$$
Llamando
$$u = x^{\frac{1}{3}}$$
tenemos la ecuación cuadrática $u^2 + 4u - 5 = 0$, cuyas soluciones son $u = -5$ y $u = 1$

Como $u = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ tenemos que
si $u = -5 \rightarrow \sqrt[3]{x} = -5$ de donde obtenemos que $x = -125$
si $u = 1 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 1$ de donde obtenemos que $x = 1$

Entonces $S = \{-125, 1\}$.

Polinomios

Analicemos la siguiente situación:

"Un vecino tiene un terreno rectangular. No recuerda la medida del frente o tiene que confirmarlo, pero está seguro de que su largo es cuatro veces la medida de su frente. Construyó una casa de 120 m^2 y una pileta circular cuyo radio es la décima parte del frente del terreno".

Si el vecino nos pide determinar la superficie del terreno que quedó libre. ¿Podemos hacerlo?

Vayamos paso a paso.

Supongamos que la medida del frente es de x metros.

Ya que la medida del frente está en metros, pensemos todas las medidas lineales en metros. De este modo, si el frente mide x , y el largo mide cuatro veces la medida del frente, entonces el largo mide, en metros, $4x$.

Entonces, ya que el terreno es rectangular, la superficie total del terreno, en metros cuadrados, es:

$$x \cdot 4x = 4x^2$$

La medida del radio de la pileta es, en metros, $\frac{x}{10}$. Entonces, la superficie de la pileta, en metros cuadrados, es:

$$\pi \left(\frac{x}{10}\right)^2$$

Si llamamos A a la superficie libre del terreno , en metros cuadrados, entonces

$$A = 4x^2 - \pi \left(\frac{x}{10}\right)^2 - 120$$

En esta situación, hemos trabajado y resuelto la consigna de determinar la superficie de terreno que quedó libre razonando *"a partir de las relaciones entre la medida del frente (x) con las otras dimensiones del terreno y el radio de la pileta"*.

Operamos con x sin ningún problema, más allá de que no es un número conocido por nosotros, y obtuvimos una expresión concreta de cómo calcular la superficie libre una vez que lo conozcamos. Como la expresión que obtuvimos depende de ese número desconocido o indeterminada, x, en lugar de hablar de A, la llamaremos $A(x)$ y representará el área libre del terreno, en metros cuadrados, luego de construir la casa y la pileta.

$$A(x) = 4x^2 - \pi \left(\frac{x}{10}\right)^2 - 120 = 4x^2 - \pi \frac{x^2}{100} - 120$$

operando con los dos primeros términos, obtenemos

$$A(x) = 4x^2 - \pi \frac{x^2}{100} - 120 = \left(\frac{400-\pi}{100}\right) x^2 - 120$$

Es muy importante que hayamos podido razonar así, pues, por ejemplo, si los demás vecinos quisieran calcular la superficie libre de sus terrenos, no tendremos que calcular todo de nuevo, sino, simplemente reemplazar el valor de x en la expresión final.

Debemos hacer notar que esta expresión tendrá sentido para algunos valores de x: en efecto, al representar $A(x)$ un área debe ser un número mayor o igual a cero.

Esta expresión es una suma algebraica de términos, donde cada término es el producto de un número real por una potencia natural de la indeterminada.

En Matemática, este tipo de expresiones se denominan polinomios.

Definición: Sean $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales y n un número natural.
Llamaremos *Polinomio en la indeterminada* x a toda expresión algebraica entera de la forma: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ se llaman coeficientes del polinomio
a_n se llama coeficiente principal.
Si $a_n = 1$ el polinomio se llama mónico
a_0 se llama término independiente.
n es el grado del polinomio , si $a_n \neq 0$.
Se denota $gr(P) = n$
$a_i x^i$ es el término de grado i.
a_i es el coeficiente del término de grado i.

Ejemplos
a) $Q(x) = -\frac{3}{5}x + 1$ es un polinomio de grado 1.
b) $T(x) = 5$ es un polinomio de grado 0.
c) $3x^2 + 2x^{-1}$ no es un polinomio. ¿Por qué?

A los polinomios que tienen un solo término se los llama monomios, a los que tienen dos, binomios; a los que tienen tres, trinomios.

Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales se los denota $\mathbb{R}[x]$.

Si todos los coeficientes son cero, el polinomio se llama *nulo* y lo denotamos $0(x)$. Este polinomio no tiene grado.

Ejemplo.
Siendo $P(x) = 3x^4 + (a+1)x - 5$ y $Q(x) = ax^4 + (2a-2)x - 5$, queremos determinar si existe la constante $a \in \mathbb{R}$, de modo que los dos polinomios sean iguales.
Para que $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales se deberá cumplir:

$$\begin{cases} 3 = a \\ a + 1 = 2a - 2 \\ -5 = -5 \end{cases}$$

Estas igualdades se verifican para un solo valor de a, que es $a = 3$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios no nulos son iguales si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.

Operaciones entre polinomios

Las operaciones entre polinomios le dan la estructura algebraica a $\mathbb{R}[x]$. Desde la perspectiva algebraica, las operaciones en el conjunto de los polinomios se definen de manera completamente arbitraria. Sin embargo, en este abordaje definiremos las operaciones denominadas *usuales*. Operaciones más abstractas tienen interés en otro campo de la matemática, denominado *Álgebra Abstracta*.

Suma de polinomios

> Para sumar dos polinomios se agrupan los términos o monomios de igual grado y se suman sus coeficientes

Ejemplo: Sean $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7$ y $Q(x) = 8x^5 - 7x^4 + x^3 - 3x^2 + 9x + 2$.

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= (3x^4+5x^2-6x+7)+(8x^5-7x^4+x^3-3x^2+9x+2) \\ &= 8x^5+(3-7)x^4+x^3+(5-3)x^2+(-6+9)x+(7+2) \\ &= 8x^5+(-4)x^4+x^3+2x^2+3x+9 \\ &= 8x^5-4x^4+x^3+2x^2+3x+9 \end{aligned}$$

Observemos que el resultado de la suma es otro polinomio y que el grado del mismo coincide con el mayor de los grados.

Veamos otro ejemplo: $P(x) = 3x^2 + 8x + 2$, $Q(x) = -3x^2 + 9x + 2$

$$P(x) + Q(x) = 17x + 4$$

Al ser los polinomios del mismo grado y sus coeficientes principales opuestos resulta que el grado del polinomio suma es menor que el grado de los polinomios sumandos.

Llamando $gr(P)$ al grado del polinomio $P(x)$ y $gr(Q)$ al grado del polinomio $Q(x)$ podemos afirmar que $P+Q$ es el polinomio nulo o bien

$$gr(P+Q) \leq max\{gr(P), gr(Q)\}$$

Propiedades de la suma

En virtud de la definición, la suma entre polinomios satisface las siguientes propiedades

– La suma es cerrada en $\mathbb{R}[x]$. Si se suman dos polinomios con coeficientes reales, el resultado es un polinomio con coeficientes reales.

– La suma es asociativa.

$$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$$

– La suma es conmutativa.

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$$

– Existe elemento neutro. El polinomio nulo es el único que verifica que para cualquier $P(x) \in \mathbb{R}[x]$,

$$P(x) + 0(x) = P(x)$$

– Existe elemento opuesto. Para cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ existe un polinomio denotado $(-P(x))$ que cumple

$$P(x) + (-P(x)) = 0(x)$$

★ A partir de la definición del opuesto, si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

el polinomio opuesto a éste será un

$$(-P(x)) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

Aplicando la definición obtendremos que

$$\begin{array}{rcl} b_0 & = & -a_0 \\ b_1 & = & -a_1 \\ b_2 & = & -a_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ b_n & = & -a_n \end{array}$$

Esto implica que el polinomio opuesto a un polinomio dado, $P(x)$, se obtiene simplemente cambiando de signo los coeficientes de $P(x)$.

De la misma manera que ocurre con cualquier conjunto que admita un opuesto para una operación suma, la existencia del opuesto induce a la definición de una operación subsidiaria de la suma: la resta.

Esta operación no tiene el status de la suma; de hecho, no es necesario siquiera definirla. Sin embargo, estamos tan habituados a hablar de *resta* o *diferencia* que por razones *de hábito* la enunciaremos.

La diferencia entre dos polinomios se define como: $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$. Es la suma entre $P(x)$ y el opuesto de $Q(x)$.

Ejemplo: Sean los polinomios: $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x + 1$ y $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x - 2$,

$$\begin{array}{rcl} P(x) - Q(x) & = & P(x) + (-Q(x)) \\ & = & -2x^4 + 5x^3 - 3x + 1 + (-3)x^3 + (6)x^2 + (5)x + 2 \\ & = & -2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

Multiplicación de Polinomios

La multiplicación de polinomios se define a partir de la imposición de que la propiedad distributiva del producto con respecto de la suma se cumpla para expresiones del tipo polinómicas.

Consideremos la expresión

$$x \cdot (1 + 2x + 3x^2)$$

Si x representara un número real, la validez de la propiedad distributiva establece que podemos escribir

$$x \cdot (1 + 2x + 3x^2) = x + x \cdot 2 \cdot x + x \cdot 3 \cdot x^2$$

A partir de la conmutatividad del producto de números y de la propiedad de la potencia $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} x \cdot (1 + 2x + 3x^2) &= x + x \cdot 2 \cdot x + x \cdot 3 \cdot x^2 \\ &= x + 2x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

Es importante que reflexionemos que la operación que realizamos no fue entre polinomios, sino entre números, donde uno de ellos estaba representado por la letra x.

En el estudio de polinomios, la letra x es una *indeterminada* la cual *no necesariamente representa un número real*. Sin embargo, para la definición de las operaciones producto, trataremos a x como un número a los efectos de las propiedades.

A partir de estas observaciones, vamos a definir la operación producto entre polinomios.

Para multiplicar dos polinomios se utiliza la propiedad distributiva, efectuando luego la suma de monomios de igual grado

Ejemplo: Sean $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x + 1$ y $Q(x) = 3x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1) \cdot (3x^2 - x + 2) \\ &= 3x^2 \cdot (-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1) - x \cdot (-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1) \\ &+ 2 \cdot (-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1) \\ &= -6x^6 + 15x^5 - 9x^3 + 3x^2 + 2x^5 - 5x^4 + 3x^2 - x - 4x^4 + 10x^3 \\ &- 6x + 2 \\ &= -6x^6 + 17x^5 - 9x^4 + x^3 + 6x^2 - 7x + 2 \end{aligned}$$

Observemos que el grado de P es 4, y el grado de Q es 2 , de modo que el término de mayor grado del polinomio producto se obtiene cuando multiplicamos $-2x^4$ por $3x^2$. Así es que su término principal resulta $(-2x^4) \cdot (3x^2) = -6x^6$ El grado del polinomio producto es 6, igual a la suma de los grados de los polinomios factores. En general, tenemos que

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$$

Recuerda: El inverso multiplicativo de un número a distinto de cero, es un número b que cumple a.b= 1 (neutro del producto). ¿Qué tendría que pasar para que un polinomio tenga inverso multiplicativo?

Para pensar: ¿Los polinomios de grado cero admiten inverso multiplicativo? ¿Y los de grado mayor o igual que uno?

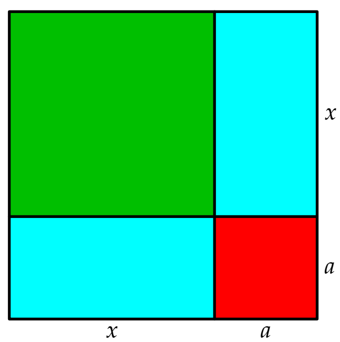
Propiedades de la multiplicación

- Es cerrada en $\mathbb{R}[x]$. Si se multiplican 2 polinomios con coeficientes reales el resultado es otro polinomio con coeficientes reales.
- La multiplicación es asociativa: $[P(x).Q(x)] \cdot T(x) = P(x).[Q(x) \cdot T(x)]$
- La multiplicación de polinomios es conmutativa:
$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$$
- Existe elemento neutro de la multiplicación de polinomios y es $I(x) = 1$. Es el único que verifica que dado cualquier $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) \cdot I(x) = P(x)$.
- La multiplicación de polinomios es distributiva respecto de la suma de polinomios:
$$[P(x) + Q(x)] \cdot T(x) = P(x) \cdot T(x) + Q(x) \cdot T(x)$$

Algunos productos especiales

El cuadrado de un binomio

Visualicemos la situación,



Notemos que hay dos rectángulos de misma superficie (celeste), cuya área es $x \cdot a$. El área verde vale x^2 y el área roja, a^2. El área del cuadrado grande es $(x + a).(x + a) = (x + a)^2$. Y si expresamos el área del cuadrado como suma de las áreas en que quedó dividido tenemos: $x^2 + 2ax + a^2$

Si resolvemos algebraicamente. Usando la definición de potencia, elevar al cuadrado significa multiplicar el factor dos veces por sí mismo:

$$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a) = x^2 + x\,a + a\,x + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

A partir de esto tenemos que:

$$\boxed{(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

★ **Cuidado!** Es muy común observar el siguiente error:

$$(x + a)^2 = x^2 + a^2.$$

Esto no es cierto. Por ejemplo vemos que si
$x = 5$ y $a = 2$
$(x + a)^2 = (5 + 2)^2 = 7^2 = 49$
pero si calculamos
$x^2 + a^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$
Este ejemplo muestra que la igualdad no es cierta.

♢ El desarrollo de $(x - \frac{1}{2})^2$ es

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= x^2 + 2\,x\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

La expresión de la izquierda se denomina cuadrado de un binomio y la de la derecha trinomio cuadrado perfecto.

Cubo de un binomio

Nuevamente utilizamos la definición de potencia

$$\begin{aligned}
(x+a)^3 &= (x+a)(x+a)(x+a) = (x+a)^2(x+a) \\
&= (x^2 + 2\,a\,x + a^2)(x+a) \\
&= x^3 + 2\,a\,x^2 + a^2x + x^2a + 2a^2x + a^3 \\
&= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{(x+a)^3 = x^3 + 3\,x^2\,a + 3\,x\,a^2 + x^3}$$

La expresión de la izquierda se denomina cubo de un binomio y la de la derecha cuatrinomio cubo perfecto.

Diferencia de cuadrados

Calculemos

$$\begin{aligned}
(x+a)(x-a) &= x\,x + x\,(-a) + a\,x + a\,(-a) \\
&= x^2 - a\,x + a\,x - a^2
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\boxed{(x+a)(x-a) = x^2 - a^2}$$

División de Polinomios

Al igual de lo que ocurre en el conjunto de los enteros, la división de polinomios está definida a través del *algoritmo de la división* y es una división con resto.

◊ Expresaremos el trinomio cuadrado perfecto $4x^2 + 4x + 1$ como el cuadrado de un binomio: Como $4x^2 = (2x)^2$, $1 = 1^2$, $4x = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 1$, entonces

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

◊
El desarrollo de $(-2+3x)^3$ es

$$\begin{aligned}
(-2+3x)^3 &= (-2)^3 + 3\,(-2)\,(3x)^2 \\
&\quad + 3\,(-2)^{\,2}\,(\;3x) + \;(3x)^{\,3} \\
&= -8 - 54x \;+ 36 \;+ 27x^3
\end{aligned}$$

◊ El trinomio cubo perfecto
Consideremos la expresión

$$-8x^3 + 6x^4 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{1}{8}x^6$$

expresaremos este cuatrinomio como el cubo de un binomio. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
-8x^3 &= (-2\,x)^3 \\
\frac{1}{8}x^6 &= \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 \\
6x^4 &= 3 \cdot (-2\,x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) \\
\frac{3}{2}x^5 &= 3 \cdot (-2\,x) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2
\end{aligned}$$

por lo que

$$-8x^3 + 6x^4 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{1}{8}x^6 = \left(-2\,x + \frac{1}{2}x^2\right)^3$$

◊ a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

b) $\frac{1}{4}x^2 - 9 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3^2$
$= \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$

Teorema del Algoritmo de la División en $\mathbb{R}[x]$.

Dados $P(x)$ y $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $Q(x) \neq 0(x)$, existen y son únicos

$C(x)$ y $R(x) \in \mathbb{R}[x]$, con $gr(R) < gr(Q)$ o $R(x) = 0(x)$ tales que

$$\underbrace{P(x)}_{dividendo} = \underbrace{Q(x)}_{divisor} \cdot \underbrace{C(x)}_{cociente} + \underbrace{R(x)}_{resto}$$

◊ Notemos que si $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7$ y $Q(x) = x^2 - 1$

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 - 7}_{dividendo} = \underbrace{(x^2-1)}_{divisor}\underbrace{(x+3)}_{cociente} + \underbrace{(x-4)}_{resto}$$

Para pensar:
¿Cuál será el cociente y el resto de la división, cuando el grado del polinomio dividendo es menor que el grado del divisor?

El algoritmo para efectuar la división, esto es, hallar el cociente y el resto de una división de polinomios, es similar al utilizado en la división de números enteros.

Con el siguiente ejemplo, desarrollado paso a paso, buscaremos presentar el método para hacer la división.

Supongamos que queremos hacer la división entre $P(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x - 6$ y $Q(x) = 2x - 3$.

- Dispongamos primero los polinomios en el *ambiente* de división

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x-3} \end{array}$$

- Tomemos el término de mayor grado del dividendo y del divisor
- El primer término del polinomio cociente lo obtenemos haciendo el

cociente entre el 1º término del dividendo con el 1º término del divisor

El primer cálculo es, entonces,

$$\frac{4x^3}{2x} = 2x^2$$

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x-3} \\ & & & & & & & & 2x^2 \end{array}$$

- El próximo paso consiste en multiplicar este primer término del cociente por todos los términos del divisor y encolumnarlos debajo de los términos del mismo grado del dividendo.

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x \;\; -3} \\ (2x^2)\cdot(2x) & & (2x^2)\cdot(-3) & & & & & & 2x^2 \end{array}$$

lo que resulta

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x \;\; -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2 \end{array}$$

- El siguiente paso consiste en restar el polinomio superior con el inferior

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x \;\; -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2 \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \end{array}$$

- Para obtener el próximo término del cociente repetimos el procedimiento anterior, pero teniendo en cuenta el término principal de la diferencia, que en este caso es $-8x^2$. Teniendo en cuenta que $\frac{-8x^2}{2x} = -4x$

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x\ -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2-4x \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \end{array}$$

– repitiendo el segundo paso (multiplicar y encolumnar) tenemos

$$\begin{array}{ccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & -6 & | \ \underline{2x\ -\ 3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & 2x^2-4x \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & -6 & \\ & & (-4x)(2x) & + & (-4x)(-3) & & \end{array}$$

calculando, obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x\ -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2-4x \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \\ & - & 8x^2 & + & 12x & & & & \end{array}$$

– Restando obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x\ -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2-4x \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \\ & - & 8x^2 & + & 12x & & & & \\ & & & - & 2x & - & 6 & & \end{array}$$

– Finalmente, repetimos una vez más el procedimiento

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x\ -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2-4x-1 \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \\ & - & 8x^2 & + & 12x & & & & \\ & & & - & 2x & - & 6 & & \end{array}$$

– Multiplicando y encolumnando,

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x\ -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2-4x-1 \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \\ & - & 8x^2 & + & 12x & & & & \\ & & & - & 2x & - & 6 & & \\ & & & + & (-1)(2x) & + & (-1)(-3) & & \end{array}$$

calculando

$$\begin{array}{ccccccccl} 4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & | & \underline{2x\ -3} \\ 4x^3 & - & 6x^2 & & & & & & 2x^2-4x-1 \\ 0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & \\ & - & 8x^2 & + & 12x & & & & \\ & & & - & 2x & - & 6 & & \\ & & & - & 2x & + & 3 & & \end{array}$$

– Finalmente, restando, obtenemos

$$
\begin{array}{cccccccccl}
4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & & & |\underline{\ 2x\ -3\ } \\
\underline{4x^3} & \underline{-} & \underline{6x^2} & & & & & & & 2x^2-4x-1 \\
0 & - & 8x^2 & + & 10x & - & 6 & & & \\
 & - & \underline{8x^2} & \underline{+} & \underline{12x} & & & & & \\
 & & 0 & - & 2x & - & 6 & & & \\
 & & & \underline{-} & \underline{2x} & \underline{+} & \underline{3} & & & \\
 & & & & 0 & - & 9/ & & &
\end{array}
$$

Verifica que

$$
\begin{aligned}
& 4x^3 - 14x^2 + 10x - 6 \\
= \quad & (2x-3)(2x^2-4x-1) + (-9)
\end{aligned}
$$

– Notemos que ya no podemos repetir el procedimiento puesto que -9 tiene grado 0 que es menor que el grado del divisor.

Entonces, al dividir $P(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x - 6$ con $Q(x) = 2x - 3$ da como resultado el cociente $C(x) = 2x^2 - 4x - 1$ y el resto $R(x) = -9$.

Divisibilidad

De manera análoga con lo que aparece en los números enteros, en el conjunto de los polinomios podemos definir el concepto de divisibilidad.

Definición

Dados $D(x)$ y $d(x) \in \mathbb{R}[x]$, con $d(x) \neq 0(x)$ Diremos que $d(x)$ divide a $D(x)$ si y solo si existe un polinomio $C(x)$ tal que $D(x) = d(x) \cdot C(x)$

Al igual que con los números enteros, son equivalentes y usuales las expresiones:

- $d(x)$ divide a $D(x)$
- $D(x)$ es divisible por $d(x)$
- $D(x)$ es múltiplo de $d(x)$
- $d(x)$ es divisor de $D(x)$
- $d(x)$ es factor de $D(x)$

▲ **Observación**. En el caso particular en que el resto de una división sea el polinomio nulo, se dice que $D(x)$ es divisible por $d(x)$ o que $d(x)$ es divisor de $D(x)$.

Ejemplos y ejercicios:

1. $(x-2)$ y $(x+2)$, ambos dividen a $x^2 - 4$ pues sabemos que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

2. $x - 2$ divide a $D(x) = x^2 - 3x + 2$, esto puede verse haciendo la división de $D(x)$ por $x - 2$ y comprobando que el resto es $0(x)$. Comprueba que el cociente de esa división es $C(x) = x - 1$ y entonces $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

3. Sabiendo que $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, completa las siguientes expresiones:

– $x - 1$ .... $x^2 - 3x + 2$

– $x^2 - 3x + 2$ .... $x - 2$

– $x^2 - 3x + 2$ .... $x - 1$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un procedimiento esquemático para hallar el cociente y el resto de un polinomio por otro de la forma $(x-a)$. Para tratar este tema de forma sencilla, lo haremos con un ejemplo.

Realicemos la división de $D(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x - 6$ por $d(x) = x - 3$ utilizando el esquema habitual y luego utilizando la Regla de Ruffini:

Por el esquema presentado para la división de polinomios, tenemos

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
4x^3 & - & 14x^2 & + & 10x & - & 6 & \underline{\;x\ -3\;} \\
4x^3 & - & 12x^2 & & & & & 4x^2-2x+4 \\
 & - & 2x^2 & + & 10x & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & \\
 & & & + & 4x & - & 6 & \\
 & & & + & 4x & - & 12 & \\
 & & & & & & 6/ &
\end{array}
$$

Ahora describiremos la Regla de Ruffini y su interpretación:

Armamos un arreglo de números, como se indica en la figura abajo, de modo que:

a) En una primera fila escribimos los coeficientes del polinomio dividendo (una vez que hemos completado y ordenado sus términos según las potencias de la indeterminada, en forma decreciente).

b) En la segunda fila y a la izquierda de una línea vertical, el valor 3 (en el caso de dividir por x-a, pondremos el número a).

c) Trazamos una línea horizontal debajo, completando el siguiente esquema.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -14 & 10 & -6 \\
3 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

d) Bajamos el coeficiente principal a la tercera fila.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -14 & 10 & -6 \\
3 & & & & \\
\hline
 & 4 & & &
\end{array}
$$

e) Multiplicamos este coeficiente por 3 y escribimos el producto debajo del segundo coeficiente del dividendo. Sumamos ambos números y escribimos esa suma debajo de ellos en la tercera fila.

f) Repetimos el paso e) tantas veces como sea necesario. En nuestro caso, el arreglo queda:

	4	-14	10	-6
3		12	-6	12
	4	-2	4	6/

Interpretación: Lo más importante ahora es la interpretación que haremos de esta tercera fila de números y cómo escribiremos el cociente y el resto de la división.

El último número de la tercera fila es el resto (recordar que como el divisor es de grado uno, el resto es una constante), los demás son los coeficientes del polinomio cociente ordenado en forma decreciente. (recordar que como el divisor es de grado uno, el grado del cociente es menor en uno que el del dividendo).

Luego, la regla nos permite concluir, tal como habíamos obtenido en el esquema habitual, que:

$R(x) = 6$ es el resto de la división, y $C(x) = 4x^2 - 2x + 4$ es el cociente ($C(x)$ es de grado $2 = 3 - 1$), y que:

$$4x^3 - 14x^2 + 10x - 6 = (x - 3)(4x^2 - 2x + 4) + 6$$

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ en $x = a$ es el resultado de calcular $P(a)$. Es decir, el valor que se obtiene al sustituir la indeterminada x por a en el polinomio y realizar las operaciones correspondientes.

Ejemplo

El valor numérico de $P(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x - 6$ para $x = 3$ es 6 pues

$$P(3) = 4\,(3)^3 - 14\,(3)^2 + 10\,(3) - 6 = 108 - 126 + 30 - 6 = 6$$

Como vimos en el ejemplo anterior, 6 es justamente el resto de la división de $P(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x - 6$ por $x - 3$. Luego el valor numérico de $P(x)$ en $x = 3$ es igual al resto de dividir a $P(x)$ por $x - 3$

Este hecho no es casual, sino parte de un resultado general, el *Teorema del Resto*, que estudiamos a continuación.

Teorema del Resto

Dados los polinomios $P(x)$ y $x - a$. El resto de dividir $P(x)$ con $x - a$ se obtiene mediante $R = P(a)$

Veamos que es sencillo demostrarlo:

Al dividir $P(x)$ por $(x-a)$ por el algoritmo de la división obtenemos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$ de grado cero ó bien $R(x) = 0(x)$. Notemos que en ambos casos, el resto puede representarse como un polinomio constante, que llamaremos R en adelante.

Tenemos entonces

$$P(x) = (x-a)C(x) + R$$

Determinando el valor numérico de $P(x)$ en $x = a$, tenemos que:

◊ Calcularemos, usando el Teorema del Resto, el resto de la división de $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$ por $x + 2$. El resto $R = P(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) - 3 = 2.4 - 10 - 3 = -5$.

$$P(a) = (a-a)C(a) + R$$

de donde concluímos $R = P(a)$ que es lo que debíamos demostrar.

Generalización del Teorema del resto y de la Regla de Ruffini

Dados $P(x) = 6x^3 - 6x + \frac{7}{4}$ y $d(x) = 2x - 1$

Si queremos encontrar el cociente y el resto o simplemente el resto de la división de $P(x)$ por $d(x)$, es claro que no podemos usar la regla de Ruffini ni el Teorema del Resto como los vimos antes, ya que el divisor no tiene la forma $x - a$. Sabemos sin embargo, por el algoritmo de la división, que existen únicos $C(x)$ y R tales que

$$P(x) = (2x-1)C(x) + R$$

Donde R constante y es el resto de dividir a $P(x)$ por $d(x)$ y $C(x)$, el cociente. Sacando factor común 2, podemos escribir la igualdad anterior como

$$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)C(x) + R \qquad (*)$$

De $(*)$ es fácil observar que :

Calculando el valor numérico de $P(x)$ en $x = 1/2$ obtenemos que $P(1/2) = R$

La expresión (*) también se puede escribir, siendo $C'(x) = 2C(x)$.

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)C'(x) + R$$

¿Qué significa ésto?

Que el $C'(x)$ y R son respectivamente el cociente y el resto de dividir a $P(x)$ por $x - \frac{1}{2}$

Para el ejemplo, el resto de dividir a $P(x)$ por $(x - \frac{1}{2})$ por el Teorema del Resto

$$\begin{aligned} R &= P(1/2) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4} \\ &= \frac{6}{8} - \frac{6}{2} + \frac{7}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{12}{4} + \frac{7}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Usando Ruffini para dividir $P(x)$ por $(x - \frac{1}{2})$, obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 0 & -6 & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ \hline & 6 & 3 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2}/ \end{array}$$

De donde se concluye también que el resto de esta división es $-\frac{1}{2}$

El Cociente de dividir a $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es $C'(x) = 6x^2 + 3x - \frac{9}{2}$, por lo cual el resto de dividirlo por $2x - 1$, es

$$C(x) = \frac{C'(x)}{2} = 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$$

Esto nos permite

1.**Generalizar** e**l Teorema del Resto**,
El resto de la división de $P(x)$ por otro de la forma $(ax - b)$ es $P(b/a)$.

2.**Generalizar la regla de Ruffini**,
Para obtener el cociente y el resto en la división de $P(x)$ por otro de la forma $(ax - b)$.

- Consideremos el algoritmo de la división $P(x) = (ax - b)C(x) + R$
- Extrayendo factor común a trabajamos con $P(x) = (x - \frac{b}{a})(a \cdot C(x)) + R$
- Al efectuar la división por Ruffini de $P(x)$ por $x - \frac{b}{a}$, el resto es el mismo, R, y para obtener el cociente dividimos por a al cociente obtenido por Ruffini.

Raíces de un polinomio

Decimos que un número real a es raíz de un polinomio $P(x)$ si y solo si $P(a) = 0$.

A modo de ejemplo, podemos notar que 2 es raíz de $P(x) = x^2 + 5x - 14$, pues $P(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 - 14 = 0$ Nos dedicaremos ahora a la búsqueda de las raíces reales de polinomios con coeficientes reales.

Es claro entonces, que queremos encontrar los valores reales de x, tales que $P(x) = 0$. Por lo tanto el problema se reduce a resolver una ecuación.

Nos facilitaría mucho este trabajo, poder escribir a $P(x)$ como producto, ya que para que un producto sea cero, alguno de sus factores debe serlo.

El teorema del resto nos permite formalizar esta relación que existe entre la raíz a de un polinomio y la divisibilidad del mismo por $(x - a)$.

Es claro que

a es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Leftrightarrow P(x)$ es divisible por $(x - a)$, de donde

◊ Si queremos encontrar las raíces de $P(x) = x^2 - 4$, deberemos encontrar los valores de x tales que $x^2 - 4 = 0$.
Como $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ y $(x - 2)(x + 2) = 0$ si y sólo si $x = 2$ ó $x = -2$, entonces las raíces de $P(x)$ son 2 y –2.

Teorema: *a es raíz de $P(x) \Longleftrightarrow P(x)$ es divisible por $(x - a)$*

Ejemplo

Supongamos que queremos encontrar las raíces de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x$. Lo primero que observamos es que podemos sacar factor común x $P(x) = x(2x^2 - 3x - 5)$ y para hallar sus raíces planteamos la ecuación

$$x(2x^2 - 3x - 5) = 0$$

de donde,

$$x = 0$$

(ya tenemos una raíz) ó

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Resolviendo esta última ecuación encontramos que las soluciones son –1 y $\frac{5}{2}$. Entonces las raíces de $P(x)$ son 0, –1, y $\frac{5}{2}$. Entonces, podemos escribir

$$P(x) = 2x(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Ejemplo

Sea $P(x) = x^3 + 4x^2 + x + 4$.

- ¿$P(x)$ es divisible por $(x + 4)$?
- ¿Podemos conocer alguna raíz?
- ¿Cuáles son todas las raíces reales de $P(x)$?

Si hacemos la división de $P(x)$ por $x+4$, obtenemos que el resto de esta división es nulo y el cociente es $C(x) = x^2+1$. Por lo que podemos concluir que $P(x)$ es divisible por $(x+4)$ y podemos afirmar también que -4 es raíz. Por lo tanto hemos respondido a los incisos a) y b).

A partir de la división realizada, es claro que

$$P(x) = x^3+4x^2+x+4 = (x+4)(x^2+1)$$

Ya sabíamos que –4 es raíz (vemos que anula al primer factor). Si $P(x)$ tiene otras raíces serán las que anulen al factor x^2+1.

Como x^2+1 no tiene raíces reales, (ya que no hay ningún número real que elevado al cuadrado sea –1), concluimos que la única raíz real es –4.

Observación importante:

En los ejemplos anteriores el polinomio es de grado 3 en ambos casos pero uno de ellos tiene 3 raíces reales y el otro tiene una sola raíz real.

Esto está directamente relacionado con que en el primer caso, el polinomio se pudo escribir como el producto de tres polinomios de grado uno, en cambio en el segundo ejemplo, el polinomio se factorizó como el producto de uno de grado uno por uno de grado dos que ya no se pudo factorizar como producto de polinomios de grado uno, ya que no tiene raíces reales.

Lo que observamos en estos ejemplos nos permite decir sin equivocarnos, que un polinomio de grado 3 tiene a lo sumo tres raíces reales; esto es un caso particular de un resultado más general que puede enunciarse así:

"Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, en coincidencia con la cantidad de divisores lineales que el polinomio tiene."

Abordaremos este resultado en lo que sigue.

Dos Teoremas importantes para hallar raíces enteras o racionales de polinomios con coeficientes enteros

Antes de tratar específicamente la descomposición factorial, enunciaremos dos teoremas que también ayudan, en algunos casos, a encontrar alguna raíz de un polinomio.

◊ Estos teoremas son conocidos como ***Teoremas de Gauss***

Teorema 1. *Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y tiene alguna raíz entera, a, entonces a divide al término independiente.*

Ejemplo

Calculemos las raíces de $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 24$. Por el Teorema 1, si $P(x)$ tiene alguna raíz entera ésta debe ser un divisor de 24.

$P(1) = 8 \neq 0$, por lo cual 1 no es raíz de $P(x)$.

De igual manera -1 tampoco lo es (pues $P(-1) \neq 0$).

$P(2) = 0$, por lo cual 2 es raíz de $P(x)$.

Haciendo la división, podemos concluir que

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 2x - 12)$$

y como el segundo factor es de grado 2, podemos elegir entre seguir usando el teorema o directamente resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + 2x - 12 = 0$.

Ejemplo

Si por ejemplo consideramos el polinomio $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - x + 1$, que tiene coeficientes enteros y los únicos divisores del término independiente son 1 y –1.

Es fácil ver que $P(1) = 4 \neq 0$ y $P(-1) = -18 \neq 0$, luego ni $x = 1$ ni $x = -1$ son raíces de $P(x)$. En consecuencia se concluye que, si tiene raíces racionales, éstas no serán enteras.

El siguiente teorema establece las relaciones entre raíces racionales de un polinomio con sus coeficientes

Teorema 2. *Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y tiene alguna raíz fraccionaria irreducible, $\frac{p}{q}$, entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal.*

Si volvemos al ejemplo en el cual

$$P(x) = 12x^3 - 8x^2 - x + 1$$

Deberíamos probar con, $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}$

Haciendo las cuentas resulta que $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son raíces y que

$$P(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Polinomios irreducibles

Vimos que $x^2 + 1$ no tiene raíces reales, por lo cual no puede escribirse como producto de factores (polinomios) de grado uno. Por este motivo, diremos que $x^2 + 1$ es un polinomio irreducible. Para profundizar este concepto, definiremos a continuación qué se entiende por polinomio reducible y polinomio irreducible:

Si $P(x)$ se puede escribir como producto de polinomios tales que, su grado sea mayor que 0 y menor que el grado de $P(x)$, se dice que $P(x)$ es reducible.

En caso contrario se dice que $P(x)$ es irreducible.

Establecemos que

Los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son:

- *Los de grado uno*
- *Los de grado dos que no tienen raíces reales.*

Esta propiedad se prueba con herramientas que están fuera del alcance de este curso, por lo que asumiremos su validez sin demostración.

Descomposición Factorial

Dado un polinomio $P(x)$, hemos visto en varios ejemplos que bajo ciertas condiciones (que no sea irreducible) podemos expresarlo como producto de factores. Este proceso lo denominamos factorización.

Un polinomio puede tener distintas factorizaciones pero solo una de ellas recibe el nombre de descomposición factorial.

Observemos, por ejemplo, el caso que vimos anteriormente

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x$$

$$P(x) = x(2x^2 - 3x - 5) \qquad (1)$$

Esta es una factorización de $P(x)$.

Luego vimos que las raíces de $2x^2 - 3x - 5$ son -1 y $\frac{5}{2}$. Entonces este polinomio es divisible por $(x + 1)$ y también por $x - \frac{5}{2}$. Dividamos por ejemplo por $(x + 1)$.

Por Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & -5 \\ & & & \\ -1 & & -2 & -5 \\ \hline & 2 & -5 & 0/ \end{array}$$

Entonces $2x^2 - 3x - 5 = (2x - 5)(x + 1)$. Reemplazando en (1)

$$P(x) = x(2x^2 - 3x - 5) = x(2x - 5)(x + 1) \qquad (2)$$

Esta es otra factorización del mismo polinomio. Finalmente podemos extraer factor común 2, y

$$P(x) = 2x(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right) \qquad (3)$$

Esta última factorización (3) se llama descomposición factorial. Lo que la caracteriza es que:

Descomposición factorial de $P(x) \in \mathbb{R}[x]$:

Una factorización de $P(x)$ es su descomposición factorial si sus factores son:

- El coeficiente principal
- Polinomios irreducibles de coeficiente principal uno (polinomios irreducibles mónicos).

Aplicación de la definición de descomposición factorial

Construcción de un polinomio a partir de sus raíces y divisores

Con la definición de la descomposición factorial podemos construir polinomios a partir de

- Conocer el grado
- Conocer divisores
- Conocer raíces
- Conocer el coeficiente principal
- Conocer el valor numérico de $P(x)$ en algun x en particular.

Notemos que si conocemos divisores (equivalentemente, raíces) y el grado podremos construir *un polinomio*, pero no será el único, puesto al no conocer el coeficiente principal, éste puede ser cualquiera.

Si conociéramos los divisores y el coeficiente principal pero no el grado, también existirán infinitos polinomios que satisfagan las condiciones.

Es por ello, que plantear *un polinomio* o *el polinomio* establece una diferencia sustancial.

- Establecer la frase " *el polinomio* " supone el único posible.
- Establecer la frase " *un polinomio* " supone alguno que cumpla las condiciones.

Ejemplo.
Construir un polinomio que satisfaga
$i)$ ser de menor grado posible
$ii)$ que tenga a $2x-1$ y x^2+4 como divisores,
$iii)$ que tenga a -3 y 3 como raíces
$iv)$ que el resto de dividirlo por x sea 4.

Notemos que para que el polinomio satisfaga $ii)$ y $iii)$ deberá contener en su descomposición factorial al producto $(2x-1)(x^2+4)(x+3)(x-3)$

Es decir que en principio tenemos

$$P(x) = (2x-1)(x^2+4)(x+3)(x-3)Q(x)$$

donde $Q(x)$ es un polinomio que surge de la definición de divisibilidad. La definición de divisibilidad no establece ninguna restricción para el grado de $Q(x)$.

Ahora, para que se satisfaga $i)$ el menor grado para $P(x)$ se corresponderá con el menor grado para $Q(x)$, que es el cero. Entonces, $Q(x) = A$, es decir, un número real.

Para pensar.
¿A es el coeficiente principal?

Hasta aquí tenemos, entonces,

$$P(x) = A\,(2x-1)(x^2+4)(x+3)(x-3)$$

La condición $iv)$ establece un valor para el resto de dividir $P(x)$ por x. Por el Teorema del resto, éste se obtiene a partir de calcular $P(0)$, entonces, $iv)$ establece que $P(0) = 4$

$$P(0) = A\,(2\cdot 0-1)(0^2+4)(0+3)(0-3) = 4$$

$$4 = A\,(-1)(4)(3)(-3) = 36A$$

Entonces,

$$A = \frac{1}{9}$$

Entonces, el polinomio es

$$P(x) = \frac{1}{9}(2x-1)(x^2+4)(x+3)(x-3)$$

Notemos que

$$P(x) = \frac{2}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+4)(x+3)(x-3)$$

Con lo cual, el coeficiente principal es $\frac{2}{9}$ y sus raíces son, $\frac{1}{2}$, 3, -3.

Si bien el problema establecía encontrar *un polinomio*, el que hallamos es el único que satisface lo planteado.

Ejemplo.
Construir un polinomio de grado 5, coeficiente principal 2, que admita a 3 y 5 como raíces, divisible por (x^2+1) y que el resto de dividirlo por $x+1$ sea 1. Responder: Es el polinomio hallado divisible por $2x-1$?
Solución.
Comencemos por sus raíces y divisores. Como tiene a 3 y 5 como raíces, sabemos que $(x-3)$ y $(x-5)$ serán factores. Como es divisible por x^2+1 tendremos a este polinomio entre sus factores. Como el coeficiente princi-pal es 2 tendremos hasta estos datos,

$$P(x) = 2\cdot(x-3)(x-5)(x^2+1)Q(x)$$

El polinomio $Q(x)$ deberá ser de grado uno, puesto que el polinomio buscado es grado 5. En general podríamos poner $Q(x) = ax+b$ pero si $a \neq 1$ alteraría el coeficiente principal. Entonces, el polinomio $Q(x)$ lo buscamos en la forma $Q(x) = x+b$. Con esto, tendremos

$$P(x) = 2\cdot(x-3)(x-5)(x^2+1)(x+b)$$

EL valor de b lo hallaremos a partir de la condición de que el resto de dividir $P(x)$ por $x+1$ sea 1. Como el resto lo obtenemos a partir de evaluar $P(x)$

en $x = -1$ e igualarlo a 1.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2 \cdot 2 \cdot (-1-3)(-1-5)((-1)^2+1)(-1+b) \\ &= 2(-4) \cdot (-6) \cdot 2 \cdot (-1+b) \\ &= 4\,(b-1) = 1 \end{aligned}$$

A partir de esta última ecuación, llegamos a que $b = \frac{5}{4}$

Entonces, el polinomio que satisface todas las condiciones es único y se escribe como

$$P(x) = 2 \cdot (x-3)(x-5)(x^2+1)\left(x + \frac{5}{4}\right)$$

siendo $3, 5$ y $-\frac{5}{4}$ sus raíces reales.

Para responder la pregunta, basta con ver los factores y observar que ninguno de ellos es $2x - 1$.

Fracciones Algebraicas

Introducción

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, $Q(x) \neq 0(x)$ llamaremos fracción algebraica a toda expresión de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

La indeterminada x podrá tomar aquí cualquier valor real siempre que dicho valor no anule al denominador. El conjunto de valores que puede tomar la indeterminada se llama conjunto de validez de la fracción y lo denotaremos C_v.

Simplificación de fracciones algebraicas

Decimos que

$$\frac{x^2+3x}{x^3+2x} = \frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}(x^2+2)} = \frac{x+3}{x^2+2}$$

para $x \neq 0$.

Sea la fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $Q(x) \neq 0(x)$. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son divisibles por el mismo polinomio $d(x)$, entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M(x) \cdot d(x)}{N(x) \cdot d(x)} = \frac{M(x)}{N(x)}.$$

En este caso, diremos que $\frac{M(x)}{N(x)}$ es una simplicación de la fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Y esta simplificación es válida en el conjunto de validez, C_v de la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

◊ Dos fracciones algebraicas son equivalentes si una de ellas es la simplificación de la otra.

Operaciones con Fracciones Algebraicas

Describamos a continuación las operaciones suma, resta, producto y cociente de fracciones algebraicas. Para que estas operaciones sean posibles será necesario definir como conjunto de validez de las mismas al conjunto de números reales que no anulen denominadores de las fracciones correspondientes y que además permitan la realización de todas las operaciones entre ellas.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Si las expresiones tienen **igual denominador**, se suman o restan sus numeradores según corresponda.

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2-x}+\frac{2x^2-5x+4}{x^2-x}=\frac{(x^2+3x-1)+(2x^2-5x+4)}{x^2-x}=\frac{3x^2-2x+3}{x^2-x}$$

$C_v = \mathbb{R} - \{0,1\}$

Para expresiones de **distinto denominador**, éstas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador.

Este denominador (denominador común) es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las expresiones originales y se obtiene, en el caso de que los denominadores estén factorizados, multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

◊ Los factores comunes aparecen en verde y en rojo, los no comunes. La operatoria se efectúa de la misma manera que la suma (o resta) de números racionales representados en fracciones.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-x}+\frac{x^2+4}{(x^2-x)(x+1)} &= \frac{x}{x(x-1)}+\frac{x^2+4}{x(\ x-1)(x+1)}\\ &= \frac{x(x+1)+(x^2+4)}{x(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{2x^2+x+4}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$C_v = \mathbb{R} - \{-1, 0-1\}$.

Otro ejemplo.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1} &= \frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{x+1}\\ &= \frac{(x+1)+4-2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{-2x^2+3x+5}{2(x+1)(x-1)}=\frac{-2(x+1)(x-\frac{5}{2})}{2(x+1)(x-1)}\\ &= -\frac{x-\frac{5}{2}}{x-1}\end{aligned}$$

$C_v = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

$$\frac{2x+1}{(x-4)}\times\frac{x^2+1}{3x-2}=\frac{(2x+1)(x^2+1)}{(x-4)(3x-2)},\qquad C_v=\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3},4\right\}$$

Para multiplicar dos o más fracciones algebraicas se deben multiplicar los polinomios de los numeradores entre sí y los de los denominadores entre sí.

Con la notación anterior,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot N(x)}$$

Fracción algebraica inversa

De manera análoga con que definimos el inverso de un número racional, vamos a definir la inversa de una fracción algebraica.

Dada la fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x) \neq 0(x)$ y $Q(x) \neq 0(x)$ definimos

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{-1} = \frac{Q(x)}{P(x)}$$

◊ Observación: A diferencia con lo que ocurre con los polinomios, en el conjunto de fracciones algebraicas tiene sentido hablar de inverso multiplicativo.

Para obtener el conjunto de validez de $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{-1}$ deben suprimirse del conjunto de validez de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ los valores que anulen a $P(x)$.

División de fracciones algebraicas

Una vez definido la inversa de una fracción algebraica, la división entre fracciones algebraicas queda definida como sigue: Dadas las fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{M(x)}{N(x)}$, con $Q(x), M(x), N(x) \neq 0(x)$ definimos la división entre $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{M(x)}{N(x)}$ como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \times \left[\frac{M(x)}{N(x)}\right]^{-1} = \frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{N(x)}{M(x)}$$

Para obtener el conjunto de validez de este cociente debe tenerse en cuenta los conjunto de validez de ambas fracciones y también que no puede anularse $M(x)$.

Resolución de Ecuaciones Fraccionarias

Ahora que hemos repasado cómo se opera con las fracciones algebraicas, volvemos a nuestro problema inicial que consistía en resolver una ecuación fraccionaria:

Supongamos que queremos encontrar los valores de x que verifican:

$$\frac{2}{x-2} + 1 = \frac{x-1}{x+3}$$

aquí en conjunto de validez será $C_v = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Igualando a cero obtenemos

$$\frac{2}{x-2} + 1 - \frac{x-1}{x+3} = 0$$

Sumando las fracciones algebraicas

$$\frac{2(x+3) + (x-2)(x+3) - (x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} = 0$$

operando en el numerador, obtenemos

$$\frac{2x + 6 + x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 + 2x + x - 2}{(x-2)(x+3)} = 0$$

esto es

$$\frac{6x-2}{(x-2)(x+3)} = 0$$

Además, para que un cociente sea cero es necesario que el numerador sea nulo, por lo tanto $6x - 2 = 0$, de donde obtenemos $x = \frac{1}{3}$. Finalmente, para saber si lo obtenido es la solución, debe estar contenido en el conjunto de validez, ya que de otra manera no puede ser solución puesto que estaría excluído. Como $\frac{1}{3} \in C_v$ es la solución de la ecuación.

Consideremos otro ejemplo. Sea la ecuación

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-2x} = 0$$

Para hallar el denominador común es necesario obtener el Mínimo Común Múltiplo (MCM) y para ello factorizamos los denominadores.

$$\frac{2}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x(x-2)} = 0.$$

Se ve fácilmente que $C_v = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

Operando obtenemos

$$\frac{2x + x(x-2) - (x+2)}{x(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{2x + x^2 - 2x - x - 2}{x(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x(x+2)(x-2)} = 0$$

de donde debe verificarse $x^2 - x - 2 = 0$.

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos que las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. Como $2 \notin C_v$, el conjunto solución es $C_s = \{-1\}$.

Consideremos un último ejemplo. Resolvamos la ecuación

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x-1} \div \frac{x+1}{x} = 0$$

El conjunto de validez de esta ecuación es $C_v = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

Resolviendo
$$\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = 0$$
simplificando,
$$\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-1} = 0$$
$$\frac{1+x}{x-1} = 0$$
$$1 + x = 0$$
$$x = -1$$
Como -1 no está en el conjunto de validez, tenemos que el conjunto solución es $C_s = \varnothing$

Ejercicios de la parte II

1. Escribe 4 ejemplos de ecuaciones algebraicas, indicando el grado de cada ecuación.
2. Escribe la definición de solución de una ecuación y reflexiona si la definición impone condiciones con respecto a la necesidad de unicidad.
3. A partir de la definición de ecuación equivalente describe el procedimiento para obtener ecuaciones equivalentes a partir de una ecuación dada. Para cada una de las ecuaciones que has propuesto para la actividad 1, obtiene 3 ecuaciones equivalentes.
4. Construye 5 ecuaciones lineales para las cuales

   a) $x = 2$ es solución b) $x = -\frac{1}{2}$ es solución c) $\forall x, x$ es solución

   d) no existe solución
5. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita

   a) $2x + 1 = 3$ b) $-x + 3 = -1$ c) $-5x + 1 = 2$

   d) $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{2}{4}x - 3$ e) $10x = 4x$ f) $\frac{x}{2} + \frac{5}{3} = -\frac{3x}{4} - \frac{8}{3}$

   e) $5 - 8x = \frac{1}{3} - 3x$
6. Determina, si es posible, los valores reales de a y b para que la ecuación en la indeterminada x:

   $$(x+2)^2 - (b-2)^2 = x(x-a) - (b^2 - 4b + 8)$$

   a) Tenga solución única.

   b) No tenga solución.
7. Construye una ecuación cuadrática para la cual

   a) $x = 2$ y $x = 1$ sean solución.

   b) $x = -\sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ sean solución.

   c) $x = 3$ es la única solución.

   d) No admite solución real.
8. Completando cuadrados, encuentra si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

   a) $x^2 + 2x + 1 = 4$

   b) $2x^2 - x + 3 = -1$

   c) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

   d) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$

   e) $-x^2 = -4x - 21$

   f) $\frac{x^2}{4} + x = 8$

   g) $4x^2 + 10x + \frac{9}{4} = \frac{64}{9} + 4x$

9. Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y, sin resolver la ecuación, determina la existencia de soluciones reales. Si existen, halle los valores de las soluciones utilizando la ecuación de Bhaskara

   a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $2x^2 - x + 3 = -1$ c) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

d) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$ e) $-x^2 = -4x - 21$

10. Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones, utilizando la sustitución adecuada

    a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ b) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

    c) $(x+3)^4 - (x+3)^2 = \frac{3}{4}$ d) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 = 0$

    e) $3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$

11. Encontrar el valor de k para que al dividir $P(x) = 2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé como resto 4. ¿Con que teorema podes justificar tu respuesta?

12. Encontrar el valor de k para que la ecuación $x^2 - \frac{(k+1)}{3}x + \frac{k}{9} = 0$ admita una única solución real. Encuentra dicha solución.

13. Encontrar él ó los valores de k para que la ecuación $(k+3)x^2 - kx + 1 = 0$ tenga solución única. Para cada valor de k hallado, encuentra la única solución de la ecuación.

14. Determina cuales de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios y justifica. Para cada polinomio encontrado, indica el grado

    a) $M(x) = \frac{3}{x^2} + 2x + 1$ b) $P(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^6 - 0x^9 + \sqrt{2} + 1$

    c) $Q(x) = x^2 + 2x + x^5 - 2\sqrt{x}$ d) $E(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

    e) $H(x) = \sqrt{2}x^3 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x + 1$

15. Dados los siguientes polinomios:

    $P_1(x) = 3x^2 + 5x - 1$ $P_2(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + 5$

    $P_3(x) = x + 2$ $P_4(x) = 3x + 3$

    Calcula y analiza el grado del polinomio resultante

    a) $\left(P_1(x) + P_3(x)\right) \cdot P_2(x)$ b) $P_4(x) \cdot P_3(x) - P_1(x)$

    c) $\left(P_4(x) + P_3(x)\right) \cdot \left(P_2(x) - P_1(x)\right)$

16. Para los polinomios del ejercicio anterior, calcula los siguientes valores numéricos:

    a) $P_1(1)$ b) $P_1(-1)$ c) $P_2(0)$ d) $P_3(-2)$ e) $P_2(\frac{1}{2})$

17. Efectúe, en el caso que sea posible, las siguientes divisiones, indicando en cada ítem el polinomio cociente y el polinomio resto. Aplique la regla de Ruffini en el caso que sea posible

    a) $[x^3 + 3x^2 - 4x - 12] : [x + 2]$

    b) $[4x^5 + 6x^4 - 11x^3 + 21x^2] : [x^7 + 3x]$

    c) $[2x^3 - 24x^2 + 4x^4 + 18x] : [2x^3 - 3x]$

    d) $[4x^3 - 3x^2 + 7] : [2x - 6]$

    e) $[x^3 + 3x^2 - 4x - 8] : [2x + 1]$

18. Escriba el algoritmo de la división obtenido al efectuar las divisiones del ejercicio 17. Y en cada caso señale cuando el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

19. Utilizando el teorema del resto, obtiene el resto de dividir al polinomio

    $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12$ por:

    a) $(x + 2)$ b) $(x + 1)$

    c) $(x - 1)$ d) $(x - 2)$

    ¿Conoce alguna raíz del polinomio $P(x)$?

20. Si se sabe que en la división de $P(x) = x^2 - 4x + 3$ por $(x - c)$ se obtiene un resto igual a – 1, ¿cuáles son los posibles valores de c?

21. Sea $P(x) = 24x^{100} + 36x^{50} - 25x^{25} + 50x^5 + 15x^3 - 5$.

    a) Si se lo divide por $(x + 1)$, ¿cuál es el resto?

    b) ¿El polinomio $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$?

22. Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 + 2kx^2 - 3x + 5$

    ¿Qué valor debe tomar k para que el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x + 3)$ sea 10?

23. Para los siguientes polinomios, extrae factor común y escribe la expresión como un producto de dos factores. Indique sin hacer cuentas, cuáles son las raíces de los polinomios.

    a) $P(x) = -2x^2 + x$ b) $Q(x) = 4x^4 + 2x^2$

    c) $R(x) = 3(x + 2)^3 + 3(x + 2)^4$ d) $S(x) = x^8 - x^6$

24. Aplicando trinomio cuadrado perfecto $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$ factoriza las siguientes expresiones. Indique sin hacer cuentas, cuáles son las raíces de los polinomios

    a) $x^2 - 2x + 1 =$ b) $x^2 - x + \frac{1}{4} =$

    c) $4x^2 + 8x + 4 =$ d) $x^6 + 6x^3 + 9 =$

25. Aplicando cuatrinomio cubo perfecto $x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3 = (x \pm a)^3$ factoriza las siguientes expresiones. Indique sin hacer cuentas, cuáles son las raíces de los polinomios

    a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 =$ b) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 =$

    c) $\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3} + x + 1 =$

26. Aplica diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ y factoriza las siguientes expresiones. Indique sin hacer cuentas, cuales son las raíces de los polinomios

    a) $x^2 - 1 =$ b) $x^2 - 2 =$

    c) $4x^2 - 16 =$ d) $x^4 - 4x^2 =$

27. Factoriza en $R[x]$ los siguientes polinomios

    a) $P_1(\mathrm{x}) = x^2 - 7x + 6$ b) $P_2(\mathrm{x}) = 2x^2 - 7x + 5$

    c) $P_3(\mathrm{x}) = 2x^4 - 10x^2 + 8$

28. A partir de los siguientes enunciados, construye el polinomio que cumpla con las condiciones pedidas e indique cuáles son sus raíces reales.

a) $P(x)$ tiene grado 2, coeficiente principal 3, es divisible por $(x+1)$ y tiene a $\sqrt{3}$ como raíz.

b) $Q(x)$ tiene grado 3, es mónico, (x^2+3) es factor del polinomio y $Q(0)=0$.

c) $R(x)$ tiene grado 5, es divisible por (x^2+1) y $(x-3)$, además $R\,(-1)=R\,(2)=0$ y al dividirlo por $(x+2)$ da resto 100.

d) S(x) tiene grado 3, es divisible por (x^2-4), es mónico, y satisface que $S(0)=8$.

e) $T(x)$ tiene grado 4, es mónico y tiene como raíz a -1, es divisible por (x^2+x-2) y al dividirlo por x da resto 4.

29. Construye un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1, 2 y – 2. ¿Es único? Con las condiciones anteriores determina el polinomio que al dividirlo por x el resto es 8.

30. Halla todas las raíces reales de $P(x)$, sabiendo que $P(x)=2x^5+6x^4-6x^3-18x^2-8x-24$, es divisible por $(x+3)$ y por (x^2+1). Justifica. Escribe la descomposición factorial de $P(x)$ en $R[x]$.

31. Verifica que $(x+1)$ es factor de $P(x)=\frac{1}{2}x^3+2x^2+\frac{3}{2}x$. Escribe la descomposición factorial de $P(x)$ en $R[x]$.

32. Sea $P(x)=9x^4+27x^3-x^2-3x$.

a) Analiza si $(x+3)$ es divisor de $P(x)$.

b) Encuentre todas las raíces reales de $P(x)$.

c) Escriba su descomposición factorial en $R[x]$.

33. Opera y simplifica las siguientes expresiones algebraicas, indicando el conjunto de validez

a) $\frac{2}{x+3}+\frac{x^2}{x+3}$

b) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}$

c) $2+\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$

d) $\frac{3}{2x}+\frac{13}{4x^2}+\frac{5}{x}$

e) $\frac{3}{x}-\frac{2-3x}{3x-1}+\frac{1-2x}{x(3x-1)}$

f) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1-x^2}$

g) $\left(\frac{1}{x-3}\right)^2-\frac{1}{x^2-9}$

h) $\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}$

i) $\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}$

j) $\frac{(x-1).(x+1)^2-(x^2-x).(x+1)}{2x^2-2}$

k) $2-\frac{2}{x-1}:\frac{x^2-4x+4}{x^2-x}$

l) $\frac{2x+5}{2x+4}-\frac{x}{x+2}$

m) $\frac{3}{x^2}-\frac{3x}{x^3-1}-\frac{3}{1-x^3}$

n) $\frac{2x.(x-3)^2-2x^2.(x-3)}{(x-3)^4}$

o) $\frac{3c}{a^2-4}+\frac{3c}{a+2}$

34. Resuelve las ecuaciones fraccionarias indicando su conjunto de validez y el conjunto solución

a) $1+\frac{1}{x-1}=x$

b) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-1}=1$

c) $\frac{1}{x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{1}{3}x + 1 = -\frac{4}{x-4}$

e) $\frac{x-5}{x+3} \div \frac{(x-1)}{x} = 0$ f) $\frac{x^2}{x+3} - \frac{4}{(x+3)^2} = 0$

g) $\frac{4x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 0$ h) $\frac{x-x^2}{\frac{x}{x+1}-x} + 1 = x^2$

i) $\frac{2}{x^2-x-6} + \frac{3}{x^2+x-2} = 0$ j) $\frac{x+2}{2x+6} - \frac{3x-2}{6x+18} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{2}{3x-9} = 0$

35. Problemas

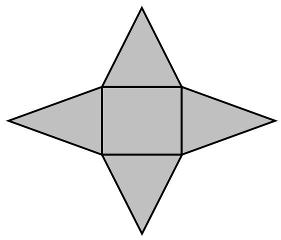
a) Un rectángulo tiene una altura que mide 3 veces la longitud de la base. Si se incrementan la base en 3 cm. y la altura en 5 cm. entonces el área es de 319 cm. ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo? Escribir una expresión algebraica que represente el área del rectángulo. ¿Es un polinomio?

b) Un número elevado al cubo, menos el cuadrado del mismo más el número es igual 105. Calcular dicho número.

c) Un fabricante de Ron desea producir 600 litros de un Ron Especial con un grado alcohólico de 26 %. Si dispone de un Ron Añejo de 30 % de grado alcohólico y otro ron de 20% de alcohol ¿Qué cantidad de cada ron deberá mezclar para obtener la cantidad deseada del Ron Especial?

d) Se tienen dos lingotes de oro, uno tiene un 60% de pureza y el otro un 97%. Queremos mezclar 4 kg del primer tipo y 1.5 kg del segundo, ¿de qué pureza será la mezcla obtenida?

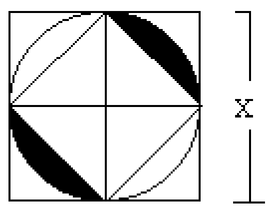
e) Dada la figura formada por un cuadrado de lado y, y cuatro triángulos isósceles, cuyos lados iguales miden x:



i. Encuentra la expresión algebraica que representa el área de la figura. ¿Es un polinomio? Justifica.

ii. Si la figura es la base de una columna recta de altura z, encuentra la expresión algebraica que represente el volumen de la columna. ¿Es un polinomio? Justifica

f) Dado un cuadrado de lado X en el cual se inscribe una circunferencia



i. Escribe una expresión algebraica que represente el área de la región sombreada. ¿Dicha expresión algebraica es un polinomio? Justifica tu respuesta.

ii. Escribe una expresión algebraica que represente el perímetro de la región sombreada. ¿Dicha expresión algebraica es un polinomio? Justifica tu respuesta.

g) José posee un terreno rectangular que tiene x metros de frente y su largo es cuatro veces la medida de su frente. La casa ocupa 120 m2 y construye una pileta circular cuyo radio es la décima parte de la longitud del frente del terreno.

i. Determina la expresión algebraica que representa la superficie libre. ¿Es un polinomio? Justifica

ii. Si el diámetro de la pileta es 6 m. ¿Cuál es la superficie del terreno?

h) Un recipiente tiene forma de cilindro circular recto. Si x es la altura y el radio de la base es la cuarta parte de la altura:

i. Halla la expresión algebraica que representa el volumen V(x) del recipiente. ¿Es un polinomio? Justifica.

ii. Si la altura x = 2 m. ¿Cuál es el volumen?

iii. ¿Cuánto debe valer aproximadamente la altura para que el volumen sea 12m3? (Utiliza la aproximación $\boldsymbol{\pi \cong 3}$)

Parte III

Rectas, Cónicas y Sistemas de Ecuaciones

La Recta. Su relación con polinomios

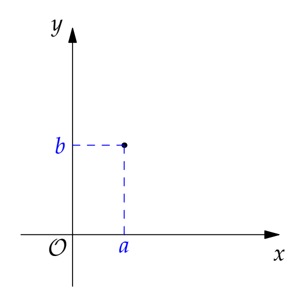
Dado un polinomio $P(x)$, es importante visualizar gráficamente la correspondencia entre cada valor posible a, de la indeterminada x, y su correspondiente valor numérico $P(a)$. Esta correspondencia se representa mediante una curva en el plano coordenado. Más precisamente es la curva que consta de todos los puntos (x, y) del plano para los que $y = P(x)$. Estudiaremos ahora algunas de estas curvas y para ello, comenzaremos por repasar algunos conceptos básicos del plano coordenado.

Plano Coordenado

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales recibe el nombre de plano coordenado, lo denotamos $\mathcal{R}^2$ y decimos que cada par ordenado (x, y) es un punto del plano.
De la misma forma en que $\mathcal{R}$, (el conjunto de los números reales) se identifica con el conjunto de todos los puntos de una recta en la que se fija un punto (generalmente denotado cero) y una unidad de medida que permite representar a todos los demás, puede identificarse $\mathcal{R}^2$ con el conjunto de todos los puntos de un plano. Para ello se trazan dos rectas, una horizontal, llamada eje x, y una vertical, llamada eje y. El punto de intersección de los ejes recibe el nombre de origen y se denota por $\mathcal{O}$. Se establece una unidad de medida, que puede o no ser la misma para ambos ejes. El sentido positivo del eje x es hacia la derecha del origen y el sentido positivo del eje y es hacia arriba del eje x.

A los ejes x e y se los llama ejes coordenados. Estos dividen al plano en cuatro partes denominadas cuadrantes. El primer cuadrante es aquel en que la abscisa y la ordenada son ambas positivas, esto es el cuadrante superior derecho, y luego se numeran siguiendo el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj: Primer Cuadrante, Segundo Cuadrante, Tercer Cuadrante, Cuarto Cuadrante.

◊ **Ubicación en el plano del punto correspondiente al par ordenado (a, b).** Se traza una recta perpendicular al eje X pasando por a y otra perpendicular al eje Y pasando por b. El punto de intersección de esas dos rectas es el punto P asociado al par ordenado (a, b).

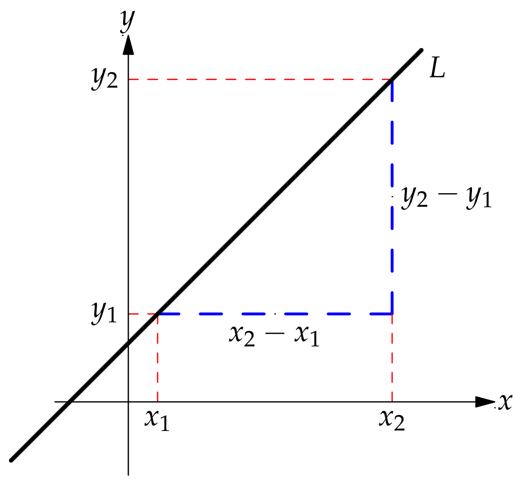


El primer número del par se denomina abscisa de P y el segundo número se llama ordenada de P. La abscisa y la ordenada de un punto reciben el nombre de coordenadas cartesianas rectangulares.

Aplica lo aprendido:
Ubica en el plano los puntos $(2, 3)$, $(-1, 5/2)$, $(-4, -2)$, $(0, 1/2)$, $(-2, 0)$.

Recta en el plano. Su ecuación y su relación con un polinomio lineal

Sabemos que dos puntos del plano determinan una recta. Si estos puntos, además, no están alineados verticalmente, ellos determinan la pendiente de la misma. La pendiente de una recta nos informa acerca del ángulo de inclinación de la misma respecto del semieje positivo de las X. Revisaremos a continuación todos estos conceptos en relación a la recta en el plano.



Pendiente

Sabemos que dos puntos determinan una recta. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ pertenecen a una recta L (ver figura anterior) que no es vertical ($x_1 \neq x_2$) tenemos la siguiente situación:
El número $y_2 - y_1$ mide la diferencia entre las ordenadas de P_1 y P_2, que puede ser positiva, negativa o cero, el número $x_2 - x_1$ mide la diferencia entre las abscisas de P_1 y P_2, y puede ser positiva o negativa, no puede ser cero porque la recta no es vertical.

Definimos la pendiente m de la recta como el cociente entre la diferencia entre las ordenadas y la diferencia entre las abscisas de esos dos puntos de la recta, es decir

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$\Diamond$ El concepto de pendiente que hemos definido es independiente de la elección de los dos puntos . Para demostrar que m no depende de la elección de los puntos de la recta, bastará que tomes un par de puntos cualesquiera sobre la recta de la figura anterior, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), traces el triángulo rectángulo correspondiente, tomes otro punto (x_3, y_3) y traces otro triangulo con este punto y uno de los puntos anteriores. Observa que los triangulos son semejantes y concluí entonces que el cociente entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de dos puntos cualesquiera de la recta da siempre el mismo resultado. Te lo dejamos como ejercicio.

Ecuación de la recta

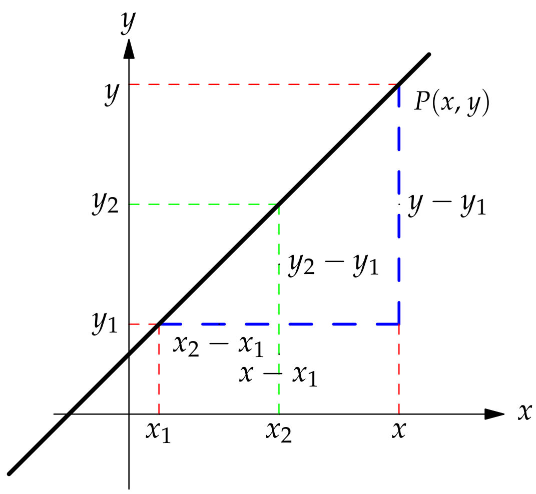
Veamos ahora que como $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la recta anterior, otro punto $P(x, y)$ estará en ella si sus coordenadas verifican

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

con lo que podemos escribir

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Es común llamar a esta ecuación, la **ecuación punto pendiente.**



Como ejemplo, consideremos una recta cuya pendiente es $m = -1$ y que contiene al punto $A(5, -2)$. Retomando la ecuación **punto pendiente**

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

tenemos

$$y - (-2) = (-1)(x - 5)$$

operando obtenemos la ecuación

$$y = -x + 3$$

Observa que si hubieras considerado el punto $B(4, -1)$ en lugar de $A(5, -2)$, la ecuación (en principio) es diferente $y - (-1) = (-1)(x - 4)$ pero es equivalente a las ya obtenidsa. Operando, llegamos a que es equivalente a

$$y + 1 = -x + 4$$

o bien

$$y = -x + 3$$

Operando obtenemos la ecuación:

$$y = m\,x - m\,x_1 + y_1$$

y, considerando que m, x_1 e y_1 con constantes, si llamamos $b = -m\,x_1 + y_1$, tenemos la ecuación:

$$y = m\,x + b$$

$\Diamond$ Es importante que recuerdes que una misma recta puede estar representada por distintas ecuaciones.

denominada **ecuación explícita** de la recta.

El término independiente, b, es denominado *ordenada al origen* y su interpretación geométrica es el punto sobre el eje y (eje de las ordenadas) que pertenece a la recta.

◊ **Ejercitacion:**

Revisemos todo lo estudiado hasta ahora, resolviendo estas situaciones:

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,-3)$ ¿Es cierto que el punto $(3,0)$ pertenece a esa recta?.

2. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,3)$ ¿Cuál es la pendiente de esa recta?. Grafica esa recta.

3. ¿Cuál es la pendiente de la recta de ecuación $y-1=3(x+4)$?. Decide si esta recta pasa por el punto $(1,-4)$.

4. Está claro que si te damos dos puntos de una recta, la representación gráfica de la misma es inmediata, ya que basta con representar en el plano estos dos puntos y luego con ayuda de una regla, trazamos la única recta que pasa por ellos. Te proponemos ahora esta consigna: "Representa gráficamente la recta de ecuación $y=3x-2$"
Para ello utiliza esta estrategia:
a. A partir de saber que la ordenada al origen es -2, ubica en el plano el punto $P_1(0,-2)$ que es el punto de la recta sobre el eje y.
b. Ahora, interpreta gráficamente que la pendiente es 3. ¿Cómo lo harías?
Recuerda el concepto de pendiente y establece, de ese modo otro punto de la recta, digamos el punto $P(x,y)$. Teniendo en cuenta ahora que , tienes muchas opciones de elección, por ejemplo, si eliges $x=1$ (esto es, eliges ubicar el punto de la recta cuya abscisa está una unidad a la derecha del punto $(0,-2)$, entonces es claro que la ordenada del mismo es $y=-2+3=1$, de modo que el punto $(1,1)$ es un punto de la recta y ahora trazarla es más que elemental. En ocasiones, esta estrategia que sugerimos suele sintetizarse del siguiente modo:

"si estás parado en un punto de una recta de pendiente m, puedes determinar otro punto de la misma desplazándote una unidad hacia la derecha y subiendo (o bajando) un segmento de longitud m en sentido vertical (subiendo si m es positivo y bajando si m es negativo)".

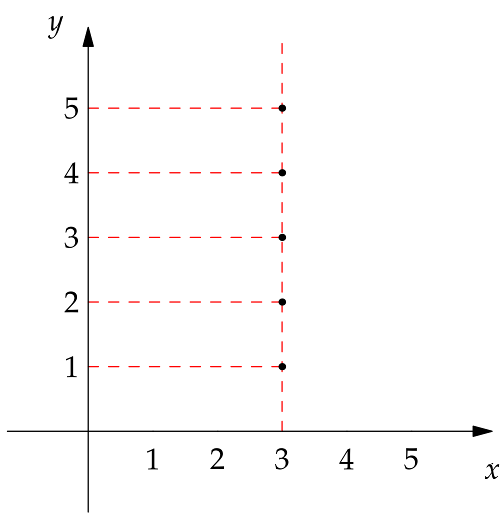
5. Relaciona la información de la columna derecha con la de la izquierda:

La recta pasa por el origen y su pendiente es negativa	$y=-x-1$
La recta pasa por el punto $(3,-2)$	$y+2=2(x-3)$
La ordenada al origen de la recta es negativa	$y=-x$
La recta pasa por el punto (2,6)	$y-1=2(x+1/\ 2)$

Rectas verticales

En lo anterior obtuvimos la ecuación de una recta no vertical. Es natural que nos preguntemos ahora: ¿Cuál es la ecuación de una recta vertical?

Consideremos la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(3,1)$, $(3,2)$. Es natural que veamos que estos puntos están alineados en una recta vertical y que rápidamente, si nos solicitan una lista de tres puntos más de esa misma recta, podríamos por ejemplo citar los puntos $(3,3)$, $(3,4)$ y $(3,5)$

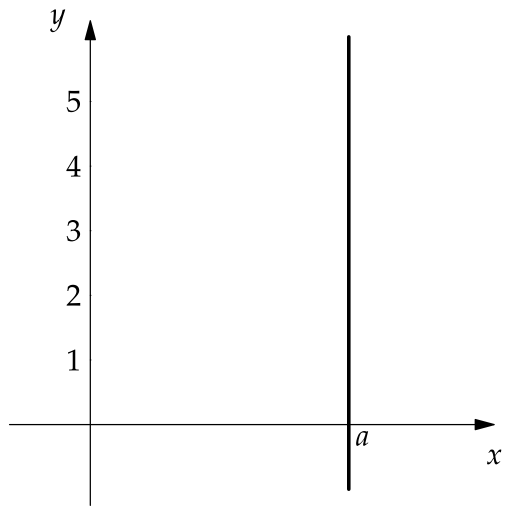


Si tuvieras que describir a todos los puntos de esta recta, cómo lo harías?

Es la recta formada por todos los puntos del plano que tienen al número 3 como primera coordenada. Por lo que es sencillo concluir que la ecuación de esta recta es:

$$x = 3$$

Es claro ahora, que si a es un número real cualquiera, la recta vertical que pasa por $(a,0)$ es la recta de ecuación $x = a$, y su gráfica es, en caso en que $a > 0$:



Aplica lo aprendido ¿Cuál es la ecuación del eje y? (Sugerencia: es una recta vertical)

Observaciones

-Cualquier recta no vertical, ya sea horizontal (pendiente $m = 0$) o con pendiente no nula, tiene ecuación $y = mx + b$.
-Una recta vertical tiene ecuación $x = a$.

En ambos casos, se puede decir que la ecuación de una recta es un caso particular de una ecuación de la forma:

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son constantes tales que A y B no son cero simultáneamente.

Esta ecuación se llama ecuación general o implícita de la recta.

Hasta aquí, hemos visto que:

Dado el polinomio $P(x) = mx + b$, los puntos $(a, P(a))$ con a un número real son exactamente los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación $y = P(x)$ o equivalentemente:

$$y = mx + b$$

Toda ecuacion de este tipo y $= mx + b$, representa una recta en el plano coordenado.
Es decir, todo puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuacion pertenecen a una recta y reciprocamente todo punto de esa recta tiene por coordenada un par de numeros que satisfacen la ecuacion.

Veamos ahora algunos casos que se pueden presentar en cuanto a la posición de dos rectas en el plano.

Rectas paralelas y perpendiculares

En lo que sigue, asumimos que:

- Dos rectas l_1 y l_2 son paralelas si y solo si $l_1 \bigcap l_2 = \varnothing$ (estamos pensando las rectas como conjuntos de puntos y entonces que la intersección entre l_1 y l_2 sea vacía es equivalente a decir que las rectas no se cortan o no tienen puntos en común)
- Dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si y solo si se cortan formando cuatro ángulos iguales (y por lo tanto, rectos).

Rectas paralelas

Dibuja en el plano coordenado dos rectas paralelas. Observa la gráfica y recuerda que la pendiente es el cociente entre el cambio de las ordenadas y el cambio de las abscisas de dos puntos de la recta, ¿qué relación hay entre las pendientes de dos rectas paralelas?

Sean l_1 y l_2 dos rectas que tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces sus ecuaciones explícitas son:

$$y = m_1 x + b_1, y = m_2 x + b_2$$

Las rectas se cortan en un punto $P(x, y)$ si y solo si existe un valor de x para el que:

$$m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$$

o bien

$$m_1 x - m_2 x = b_2 - b_1$$

$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$$

Ahora bien, analicemos esta última ecuación. Es claro que:

- Si $m_1 - m_2 = 0$ la ecuación tendrá solución sólo si $b_2 - b_1 = 0$ y en este caso habrá infinitas soluciones. En este caso, las rectas se llaman coincidentes ya que tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen.

- si $m_1 - m_2 \neq 0$ existirá (independientemente del valor de $b_2 - b_1$) un único valor de x que la satisface la ecuación, por lo que podemos concluir que las rectas se intersectan en un solo punto.

Condición de paralelismo

Podemos decir entonces que la condición de paralelismo es

▲ **Observación.** En el caso de que dos rectas tengan la misma pendiente y misma ordenada al origen decimos que son *coincidentes*.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente y distinta ordenada al origen.

Ejemplo.

Nos proponemos ahora encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -7)$ y es paralela a la recta de ecuación $6x + 3y - 4 = 0$.

Expresamos la ecuación de la recta dada en su forma explícita, ya que de esta forma inmediatamente podemos identificar su pendiente.

Despejando y en función de x obtenemos:

$$y = -2x + \frac{4}{3}$$

de modo que la pendiente de la recta dada es -2.

Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente y la recta que buscamos debe ser paralela a ésta, su pendiente también debe ser -2. Finalmente, si consideramos que la recta que buscamos pasa por el punto $(3, -7)$, entonces, usando la forma punto-pendiente, resulta que una ecuación de la recta buscada es:

$$y + 7 = -2(x - 3)$$

y es claro que esta ecuación es equivalente a

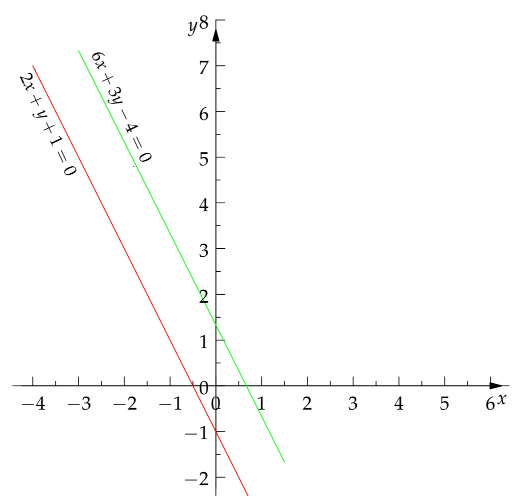
$$y = -2x - 1$$

que es su ecuación en la forma explícita y también es equivalente a:

$$2x + y + 1 = 0$$

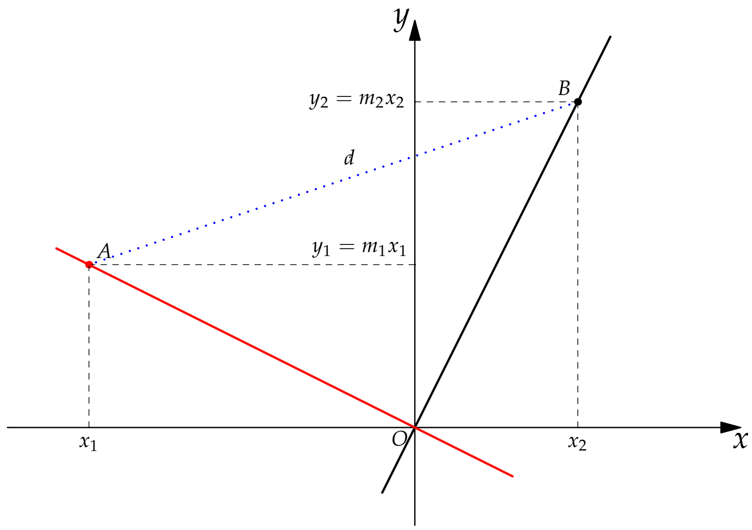
en su forma implícita.

Ahora grafiquemos las dos rectas, la dada y la que hallamos



Rectas Perpendiculares

La condición de perpendicularidad quizás no es tan fácil de descubrir. A continuación te guiamos para deducirla con un ejemplo de dos rectas que pasan por el origen.



Elegimos dos puntos $A(x_1, m_1 x_1)$ y $B(x_2, m_2 x_2)$, distintos del origen de coordenadas, cada uno de ellos sobre una de las rectas. Las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es recto, lo que implica que el triángulo AOB es rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras, el triángulo AOB es rectángulo si y sólo si

$$[d(A,B)]^2 = [d(O,B)]^2 + [d(O,A)]^2$$

que utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos es

$$(m_2 x_2 - m_1 x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \quad = \quad (m_2 x_2)^2 + x_2^2 + (m_1 x_1)^2 + x_1^2$$

desarrollando los cuadrados y simplificando nos queda

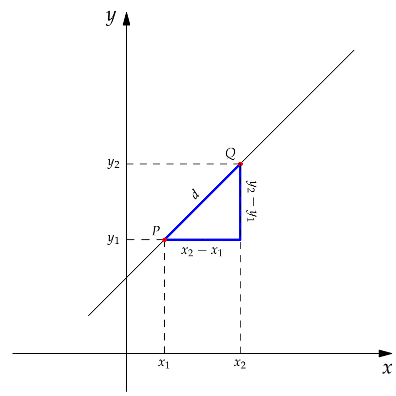
$$-2 m_1 m_2 x_1 x_2 - 2 x_1 x_2 = 0$$

Dividiendo por $-2x_1x_2$ (que sabemos que es distinto de cero, puesto tanto x_1 como x_2 son distintos de cero) se ve que

$$m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$$

★ **Distancia entre dos puntos del plano** Dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos del plano La distancia entre ambos se define a través de la relación

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



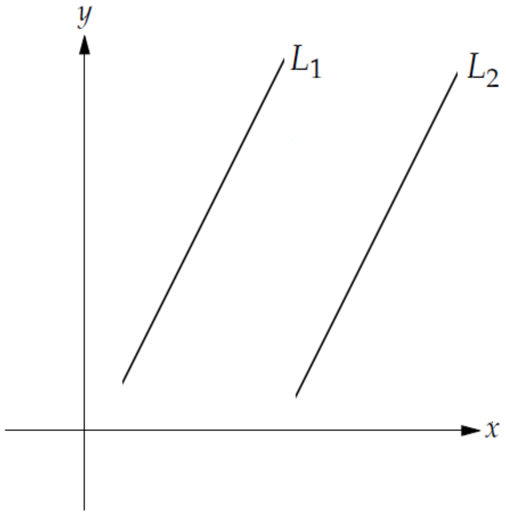
Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

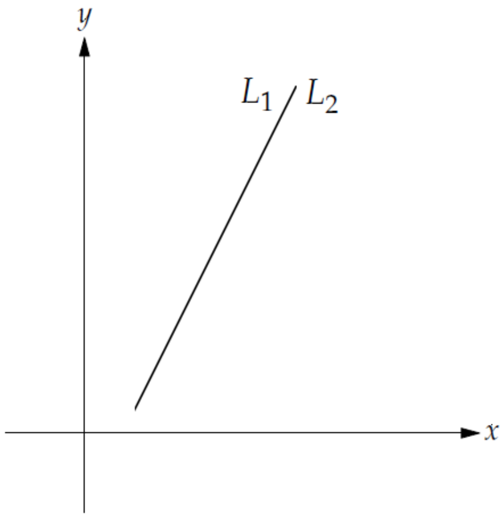
▲ **Observación.** Este criterio es aplicable cuando ninguna de las rectas en cuestión sea horizontal ni vertical.

Resumiendo:

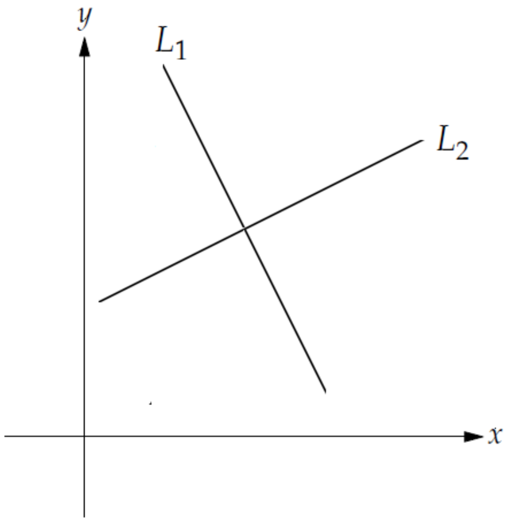
L_1: $y = m_1x + b_1$
L_2: $y = m_2x + b_2$



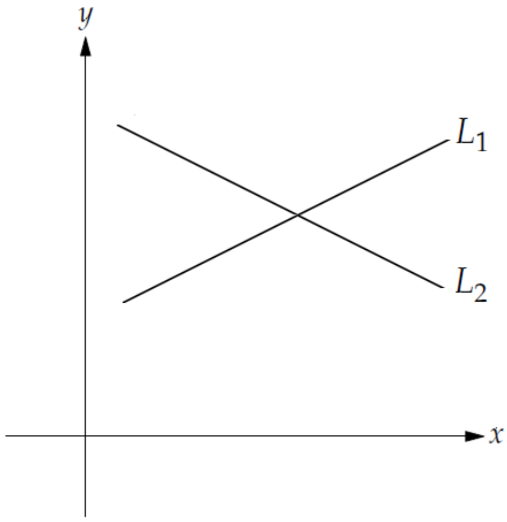
L_1 y L_2 son paralelas
$m_1 = m_2$
$b_1 \neq b_2$



L_1 y L_2 son coincidentes
$m_1 = m_2$
$b_1 = b_2$



L_1 y L_2 son perpendiculares
$m_1 \cdot m_2 = -1$



L_1 y L_2 no son paralelas ($m_1 \neq m_2$) ni son perpendiculares ($m_1 \cdot m_2 \neq -1$) y se intersectan en un punto

Cónicas

La parábola. Su ecuación y su relación con polinomios cuadráticos.

Definición por Construcción

La parábola es una de las secciones cónicas que pueden obtenerse como la intersección de un cono circular con un plano que no contenga al vértice del cono. Las distintas cónicas aparecen dependiendo de la inclinación del plano respecto del eje del cono. Si el plano es perpendicular a dicho eje produce una circunferencia; si se lo inclina ligeramente, se obtiene una elipse; cuando es paralelo a una generatriz del cono se tiene una parábola y si corta a ambas ramas del cono la curva es una hipérbola.

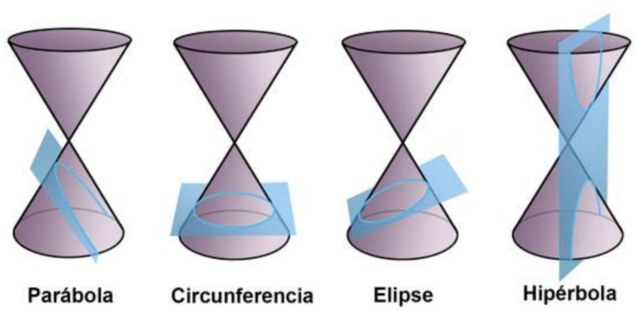


Figure 1: Cortando con planos los conos obtenemos a) Parábola (izquierda), b) Circunferencia (medio inferior), c) Elipse (medio superior) y d) Hipérbola (derecha)

Así como describimos antes a la recta como un objeto geométrico del plano y establecimos luego el concepto de ecuación de la recta y vinculamos su gráfica a un polinomio lineal, definiremos ahora a la parábola para luego determinar su ecuación y su vinculación con los polinomios cuadráticos.

> **Definición:** Se llama parábola al conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.

Teniendo en cuenta la definición de parábola, los puntos que equidistan del foco y la recta son los que pertenecen a la parábola. En la figura que

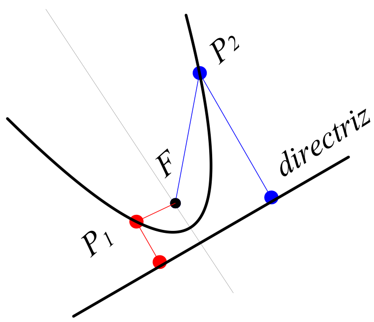


Figure 2: Dos puntos de una parábola.

Elementos distintivos de la Parábola.
La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es un eje de simetría de la parábola y se lo denomina eje de la parábola. El punto medio entre el foco y la directriz se denomina vértice. Es claro que el vértice es un punto que pertenece al eje de la parábola. Cada una de las partes simétricas respecto del eje de la parábola, se denominan su ramas.

aparece al margen, se colocan, a modo de ejemplo, dos puntos situados sobre la parábola y se ve que satisfacen la definición.

Las definiciones de las cónicas son muy anteriores a la existencia del plano coordenado, es decir, a los ejes cartesianos. Esto significa que la ubicación relativa de la misma no necesita ser horizontal ni vertical, ya que en la definición nada se indica sobre la posición de la recta directriz. Es por eso que la curva que se muestra al satisfacer los requerimientos impuestos por la definición es, en efecto, una parábola.

La aparición del sistema de ejes cartesianos, no sólo *cuantifica* la geometría, sino que otorga a la ubicación y orientación de los objetos un sentido bien definido.

La *cuantificación* que mencionamos es en el sentido de la representación a través de ecuaciones de las figuras geométricas.

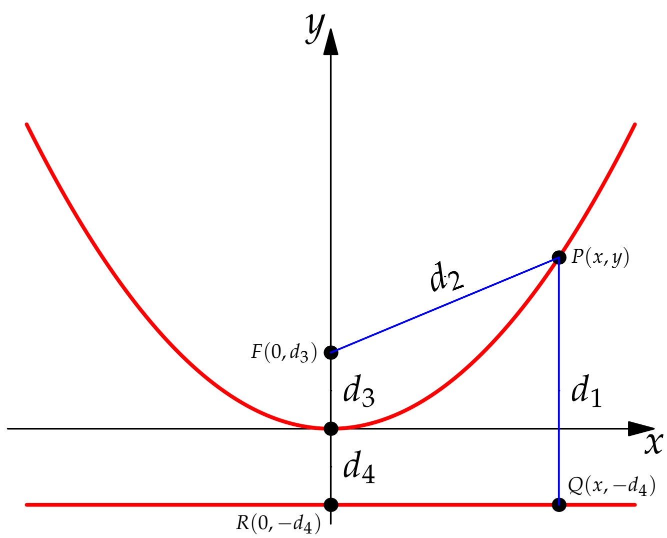
En lo que sigue, describiremos la parábola en un sistema de coordenadas, por lo que nuestro enfoque es en el sentido de la *geometría analítica*.

La geometría analítica es el estudio de la geometría, pero a través de las relaciones entre las coordenadas de los puntos que las constituyen. Desde esta perspectiva, las figuras geométricas no sólo son lo que son, sino que están ubicadas precisamente en un sistema de coordenadas (cartesiano) y las coordenadas de los puntos que componen las figuras están relacionados entre sí a través de ecuaciones.

El abordaje que daremos en este material es analítico, por lo que buscaremos las ecuaciones que representan a la parábola en diferentes casos.

Caso 1: Parábola con vértice en el origen de coordenadas y directriz paralela al eje x.

Es claro que el eje de una parábola de este tipo es el eje y (ya que es una recta perpendicular a la directriz que pasa por el origen de coordenadas). Considerando que el foco esté por encima del eje x, la gráfica es :



A partir de la figura y de la definición constructiva, encontraremos la ecuación que define a una parábola en el plano cartesiano.

Consideremos dos puntos de la parábola, $P(x, y)$ (notemos que es uno *cualquiera*) y el propio vértice $(0, 0)$. Consideremos dos puntos sobre la recta directriz, R y Q tales que R dista del vértice una distancia d_4 y Q está a una distancia d_1 del punto P.

La definición de la parábola establece que

$$
\begin{aligned}
d_1 &= d_2 \\
d_3 &= d_4
\end{aligned}
$$

En el sistema de coordenadas, determinemos las expresiones para cada una de las distancias involucradas.

- $d_1 = y + d_4$
- $d_2 = \sqrt{x^2 + (y - d_3)^2}$
- $d_3 = d_4$

El primer resultado es que la ecuación de la recta directriz es

$$y = -d_4$$

Ahora, igualando d_1 con d_2 y sustituyendo $d_3 = d_4$, obtenemos

$$\sqrt{x^2 + (y - d_4)^2} = y + d_4$$

Para encontrar las relaciones entre las coordenadas del punto genérico de la parábola, $P(x,y)$ es conveniente elevar al cuadrado a ambos miembros a los efectos de que las relación no esté dada a partir de raíces.

$$\left(\sqrt{x^2+(y-d_4)^2}\right)^2 = (y+d_4)^2$$

con lo que obtenemos

$$x^2+(y-d_4)^2 = (y+d_4)^2$$

Desarrollando a ambos miembros

$$x^2+y^2-2\,y\,d_4+d_4^2 = y^2+2\,y\,d_4+d_4^2$$

simplificando,

$$x^2-2\,y\,d_4 = 2\,y\,d_4$$

de los que resulta la *ecuación canónica de la parábola*

$$x^2 = 4\,d_4\,y$$

El número d_4 representa una distancia, por lo que siempre es positivo. Si comparamos con d_3 -que a los fines de distancia es lo mismo- $F(0,d_3)$ como punto del plano, admite tanto valores positivos como negativos.

Si llamamos a $F(0,p)$ a las coordenadas del foco de la parábola (en este caso, vertical), tenemos que $d_3 = p$. Y, la ecuación canónica de la parábola es

$$\boxed{x^2 = 4\,p\,y}$$

Notemos que es el signo de p quien determina la orientación de la parábola, esto es, si las ramas están hacia las y positivas o hacia las y negativas (arriba y abajo).

Si llamamos $a = \frac{1}{4p}$, la ecuación canónica se transforma en

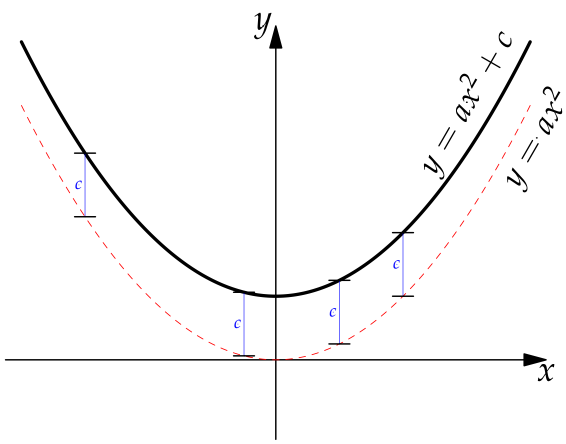
$$y = ax^2$$

entonces, es claro que:

- Esta parábola representa la correspondencia entre los valores que la variable x puede tomar y el valor numérico que el polinomio cuadrático $P(x) = ax^2$ le asigna.
- El signo de a, es el de la ordenada del foco de la parábola, por lo que afirmamos que si $a > 0$, las ramas de la parábola son hacia arriba y si $a < 0$, las ramas son hacia abajo.

Pensemos ahora en el polinomio $T(x) = ax^2 + c$. ¿Con qué gráfica lo podríamos asociar?

Supongamos, para pensar más en concreto, que $a > 0$ y $c > 0$. Es natural pensar que la gráfica asociada a $T(x) = ax^2 + c$ es la misma que la $P(x) = ax^2$ pero desplazada verticalmente hacia arriba (cada punto de la parábola original se ubicará exactamente en un punto sobre la vertical que está "c unidades hacia arriba").



Siguiendo la idea de ir completando un polinomio de grado dos, veamos que un polinomio de grado dos tiene por representación gráfica una parábola vertical.

Consideremos el polinomio de grado dos

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

Extrayendo factor común a obtenemos

$$R(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Completando cuadrados para $x^2 + \frac{b}{a}x$ obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

con lo que obtenemos,

$$R(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

o, equivalentemente

$$R(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Para relacionar los polinomios con las figuras geométricas, lo que hacemos es asociar a cada valor de x, el valor de y a través de la relación $y = R(x)$ con lo que la relación entre la coordenada x y la coordenada y vendrá dada por la relación

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Esta relación es equivalente a

$$\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Es habitual en matemática un procedimiento denominado *cambio de variables*.

Los cambios de variables constituyen -en cierto sentido- una reescritura de las relaciones matemáticas para conseguir una simplificación a un determinado problema. Asimismo, permiten encontrar simetrías en situaciones aparentemente disímeles las cuales, una vez realizado un cambio de variables, resultan análogas.

En este problema, notemos que si definimos unas nuevas variables, por caso, x' e y' de la forma,

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b}{2a} \\ y' &= y + \frac{b^2}{4a} - c \end{aligned}$$

La ecuación

$$\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

la podemos escribir como

$$y' = a\,x'^2$$

Si comparamos esta ecuación con la que obtuvimos para la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen,

$$y = a\,x^2$$

inferimos que

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

admite una representación de parábola vertical, cuya ecuación canónica es

$$y' = a\,x'^2$$

Esta ecuación representa, entonces, una parábola con vértice en el $V(0,0)$ y de orientación vertical. Ahora, este vértice está en el $(0,0)$ de x' e y'.

Con lo cual, en virtud de las relaciones

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b}{2a} \\ y' &= y + \frac{b^2}{4a} - c \end{aligned}$$

tenemos que las coordenadas del vértice (α, β) serán aquellas que hace cero tanto a x' como a y'

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \frac{b}{2a} \to \alpha = -\frac{b}{2a} \\ 0 &= \beta + \frac{b^2}{4a} \to \beta = -\frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

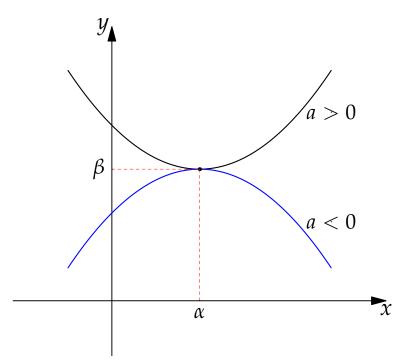
Volviendo a las coordenadas (x, y) tenemos que la ecuación toma la forma

$$\boxed{y - \beta = a(x - \alpha)^2}$$

★ Para construir la gráfica del polinomio $R(x) = ax^2 + bx + c$, basta con completar cuadrados y expresarlo en su forma normal. Una vez que lo hayamos hecho, podemos construir sin dificultad la parábola correspondiente.

Esta ecuación se la conoce como *ecuación canónica de la parábola*. Los elementos de esta parábola son, a saber

- Orientación: Vertical, eje de simetría paralela al eje y
- Ubicación del vértice: $V(\alpha, \beta)$
- Ubicación del foco: $F(\alpha\,, \frac{1}{4a} + \beta)$
- Ecuación de la recta directriz: $y = \beta - \frac{1}{4a}$

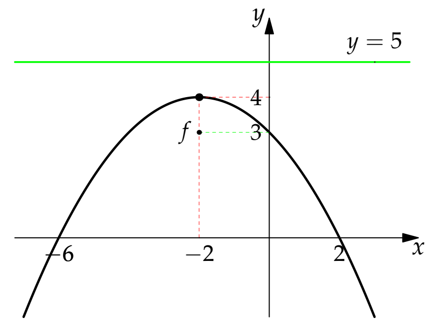


Ejemplo:
Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-2, 4)$ y foco en el punto $(-2, 3)$.

Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa el eje de la parábola es vertical y tiene ecuación $x = -2$, además abre hacia abajo ya que $p = -1$, entonces se sabe que la directriz tiene ecuación $y = 5$. La ecuación normal o canónica de la curva dada es

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x + 2)^2$$

Gráficamente



Caso 2: Parábola con vértice en el origen de coordenadas, foco en $(p, 0)$ y directriz paralela al eje y.

Es claro que, en este caso, la ecuación de la directriz es $x = -p$ y, realizando cálculos análogos a los que hicimos en el caso 1, es claro que obtendremos la ecuación

$$\boxed{\begin{array}{c} y^2 = 4\,p\,x \\ \text{o} \\ x = a\,y^2 \end{array}}$$

También puede observarse que si $p > 0$ (y por lo tanto $a > 0$), y toma valores siempre positivos y cuando $p < 0$ (y por lo tanto $a < 0$), y toma valores siempre negativos.

De manera análoga, podemos pensar que la ecuación estándar de una parábola de eje horizontal con vértice en el punto (α, β) es:

$$\boxed{(x - \alpha) = \tfrac{1}{4\,p}(y - \beta)^2}$$

donde $|p|$ es la distancia entre el foco y el vértice, y el signo de p es positivo o negativo según el foco esté a la derecha del vértice o a la izquierda de él.

Aplica lo aprendido.
Grafica la situación, plantea las relaciones y observaciones análogas a las hechas para el caso 1. ¿Cuál es el eje de simetría esta parábola? ¿Cuál es el vértice? ¿Tiene la gráfica algún punto en común con los ejes coordenados?

Ejemplo: Dada la ecuación

$$y^2 + 6x + 9 = 0$$

hallar la ecuación canónica de la parábola, indicar el vértice, el foco y la directriz. ¿Cuál es el eje de la parábola?

Escribimos la ecuación en la forma

$$y^2 + 6\left(x + \frac{9}{6}\right) = 0$$

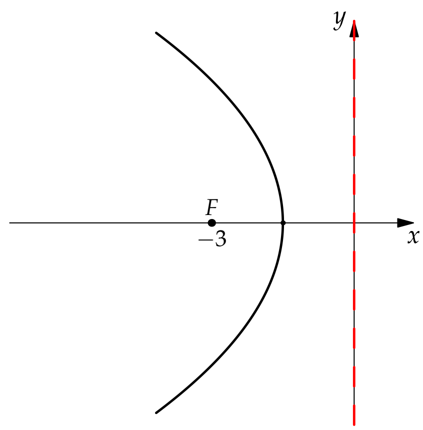
que es equivalente a

$$\left(x + \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{6}\,y^2$$

y de ese modo obtenemos que $4p = -6$, de donde $p < 0$. Con estos datos sabemos que el foco está en el punto $F(-3, 0)$, el vértice en el punto $V(-\frac{3}{2}, 0)$ y la directriz es la recta de ecuación

$$x = 0.$$

El eje de la parábola es el eje X y su gráfica es:



Ejemplo:
Dada la ecuación
$$3y^2 - 6y - 6x + 12 = 0$$

hallar la ecuación canónica de la parábola, indicar el vértice, el foco y la directriz. ¿Cuál es el eje de la parábola?. Trazar la gráfica.

Primero completamos cuadrados,

$$\begin{aligned} 3y^2 - 6y - 6x + 12 &= 0 \\ 3\left(y^2 - 2y\right) - 6x + 12 &= 0 \\ 3\left[(y-1)^2 - 1\right] - 6x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y-1)^2 &= \frac{6x+12}{3} + 1 \\ (y-1)^2 &= 2x - 4 + 1 = 2x - 3 \end{aligned}$$

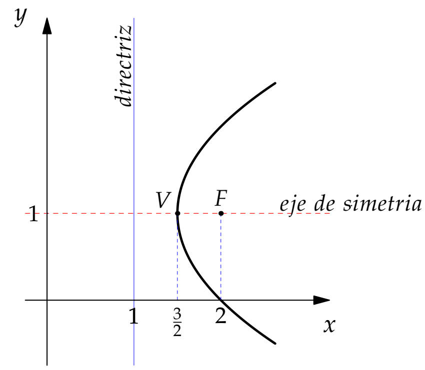
La ecuación canónica obtenida es

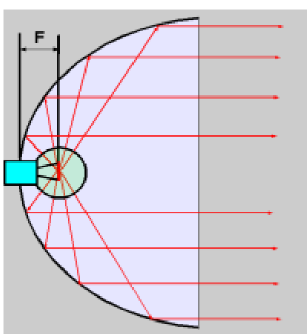
$$(y-1)^2 = 2(x - \frac{3}{2})$$

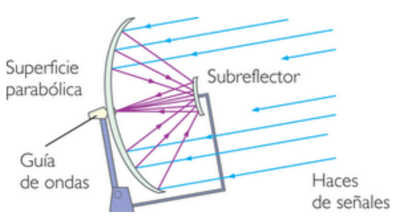
Una vez obtenida la ecuación canónica, identificamos los elementos. Tenemos que $4p = 2$, entonces, $p = \frac{1}{2}$

- Vértice: $V(\frac{3}{2}, 1)$
- Foco: $F(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, 1)$, calculando, $F(2, 1)$
- Directriz: $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$, entonces, $x = 1$

Con estos elementos, la gráfica es







Aplicaciones Técnicas de la parábola

Óptica

Una de las propiedades geométricas de la parábola más utilizada fue descubierta por los griegos: un rayo, por ejemplo de luz, que emane del foco, se refleja en la parábola a lo largo de una trayectoria paralela al eje de la parábola, sin importar cuál sea el punto de reflexión. Recíprocamente, un rayo paralelo al eje de la parábola y reflejado en ella pasa por el foco. Este hecho es útil en la construcción de linternas, faros de automóviles y faros buscadores, en los cuales el reflector tiene una sección transversal parabólica y la fuente luminosa está en el foco. No es casual que a las lamparitas se las llame *"foquito"*.

Hasta la década del 80, en los automóviles se aplicaba este principio para la óptica. Actualmente, la orientación de los rayos de luz para la iluminación (luces bajas y altas) se orientan con otros dispositivos y lentes y ya no es necesario la forma parabólica que tenían las ópticas originales.

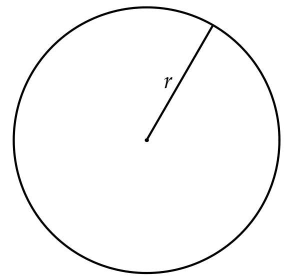
Comunicaciones

El radar es una contracción de los términos ingleses *radio detection and ranging*, que significa *"detección y medición de distancias por radio"* utiliza el principio de la lámpara, pero en sentido inverso: Las ondas electromagnéticas que llegan paralelas al eje de simetría de la parábola se reflejan en la misma y convergen al foco. En el foco se dispone un colector de la información para luego decodificar.

Circunferencia

Definición. Se llama circunferencia al conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia constante del centro a todos los puntos de la circunferencia recibe el nombre de radio.

Así como ocurre con la parábola y en general con todas las cónicas, las definiciones no presuponen un sistema de coordenadas, sino que son por construcción.



La Circunferencia en un Sistema de Coordenadas

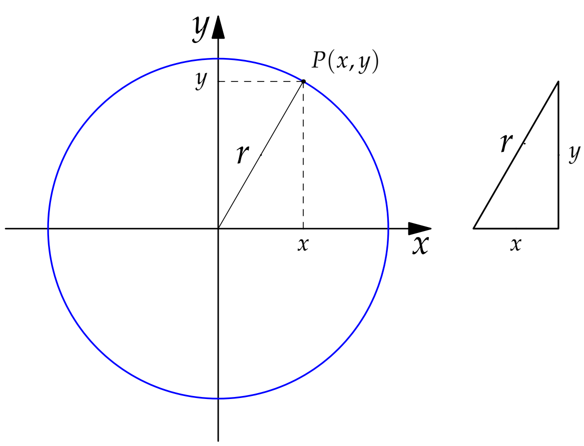
De la misma manera en que tratamos la parábola, ubicaremos la circunferencia en un sistema de ejes cartesianos y a partir de la defininción de distancia entre dos puntos, obtendremos la ecuación que la represente.

Elementos Distintivos

En un sistema de coordenadas, los elementos distintivos de la circunferencia serán la posición del centro y la medida del radio.

Caso 1. Circunferencia con centro en el origen y radio r

Consideremos una circunferencia con centro en el origen y de radio r. Consideremos un punto $P(x, y)$ que pertenezca a la cincunferencia. gráficamente,



Por definición, para que $P(x, y)$ (que representa cualquier punto) pertenezca a la circunferencia, se debe cumplir que la distancia al origen sea siempre r. Por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$$

▲ **Observación**. A partir de

$$x^2 + y^2 = r^2$$

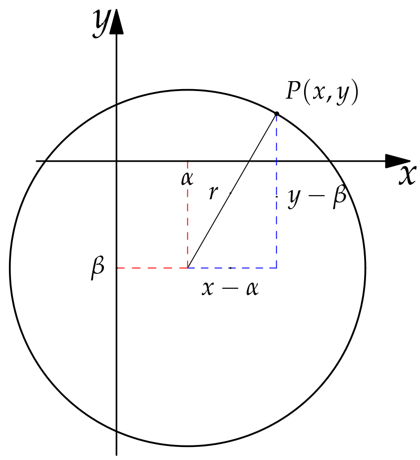
y diviendiento a ambos miembros por r^2 obtenemos la expresión equivalente

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Esta expresión no es usual para circunferencia, pero nos puede ser de ayuda en el estudio de elipses.

Caso 2. Circunferencia con centro en $C(\alpha,\beta)$ y radio r

Consideremos una circunferencia de radio r, pero ahora centrada en un punto arbitrario $C(\alpha,\beta)$. La representación en el plano cartesiano está dada en la siguiente figura



La ecuación de la circunferencia es la relación entre las coordenadas x, y de cada punto. Para obtener esta relación, notemos que la distancia entre el punto $P(x,y)$ y el centro $C(\alpha,\beta)$ es

$$d(P,C)=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

Además, por la definición de circunferencia, todos los puntos que pertenecen a la misma deben ser tales que la distancia al centro sea r. Con lo cual, elevando al cuadrado la distancia, tenemos que la *ecuación normal o canónica de la circunferencia* de radio r y centro en $C(\alpha,\beta)$ es

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$

▲ **Observación**. Es frecuente que la ecuación no venga expresada de tal manera en que tanto el centro como el radio estén explicitados. Comúnmente, dada una ecuación de la forma

$$x^2+ax+y^2+cy+d=0$$

debe ser trabajada completando cuadrados. Esta ecuación es la denominada *ecuación general de la circunferencia*.

Ejemplo.
Notemos que la ecuación $x^2+(y+3)^2=4$ representa una circunferencia de radio 2 y centro en el $C(0,-3)$

Ejemplo.
Encuentra la ecuación de la circunferencia centrada en $C(1,-6)$, sabiendo que el punto $P(2,3)$ pertenece a la gráfica de la circunferencia.

Sabemos que si la circunferencia tiene centro en $C(1,-6)$ su ecuación es

$$(x-1)^2+(y+6)^2=r^2$$

Si el punto P pertenece a la circunferencia, sus coordenadas deben verificar la ecuación, entonces

$$(2-1)^2 + (3+6)^2 = r^2$$

De donde, haciendo las cuentas $r^2 = 82$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + (x+6)^2 = 82.$$

Los elementos de la circunferecia son el centro $C(1, -6)$ y el radio $r = \sqrt{82}$

Elipse

La figura elíptica es estudiada desde la antigüedad. Ya en el antiguo Egipto se descubrieron elipses grabadas en piedra.

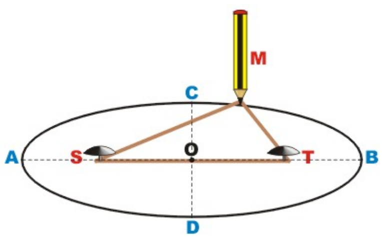
En la arquitectura renacentista, la elipse ha sido usada para la construcción de salones, plazas, etc. La Plaza de San Pedro, en Roma, tiene esta forma.

En física, la elipse aparece como la trayectoria que describen los planetas y asteroides alrededor del sol.

Definición.

Una *elipse* es el conjunto de puntos P del plano tal que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F' y F, llamados $focos$, es constante. El punto medio del segmento que une los focos se denomina *centro*.

Para visualizar la definición de la elipse, basta imaginar dos chinches clavados en los focos y un trozo de cuerda atada a ellos. Al ir moviendo un lápiz que tensa esa cuerda, su trazo irá dibujando una elipse, como se muestra en la siguiente figura.



Ecuación de la elipse

Vamos a deducir a partir de la definición, la ecuación de una elipse cuyos focos pertenecen a uno de los ejes coordenados, digamos por ejemplo que están en el eje x, y centro en el origen de coordenadas. Así, los focos serán los puntos $F'(-c,0)$ y $F(c,0)$ y para los puntos $P(x,y)$ que pertenezcan a la gráfica de la elipse debe verificarse que

$$d(P,F') + d(P,F) = k$$

Donde k es un valor fijo.

Como esta propiedad se debe cumplir en cualquier punto de la elipse, notemos que si consideramos el punto A o B de la figura, y si llamamos a al semieje mayor de la elipse (en este caso es el semieje horizontal), tenemos que la suma de las distancias es fácil de calcular y da $2a$. Con lo cual, como este valor es constante, tendremos

$$d(P,F') + d(P,F) = 2a$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

entonces

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevamos al cuadrado a ambos miembros y simplificamos y obtenemos

$$\begin{aligned}
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a^2+(x-c)^2+y^2-(x+c)^2-y^2\\
4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a^2+x^2-2cx+c^2-x^2-2cx-c^2\\
4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a^2-4cx\\
a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a^2-cx
\end{aligned}$$

si nuevamente elevamos al cuadrado ambos miembros dela igualdad, tenemos

$$\begin{aligned}
a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] &= a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
a^2(x-c)^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2\\
x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)(*)
\end{aligned}$$

mirando en la figura anterior el triángulo $F'PF$ y recordando que la suma de las longitudes de dos lados es mayor que la medida del tercer lado se tiene

$$d(P,F')+d(P,F)=2a>2c$$

y por lo tanto $a>c>0$, de donde se deduce que $a^2-c^2>0$ teniendo en cuenta esto podemos dividir ambos miembros de la igualdad (*) por $a^2(a^2-c^2)$ y obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Si en la figura, el lápiz se encontrara en el punto C, notemos que define dos triángulos rectángulos: $F'OC$ y el $OF'C$. El semieje menor de la elipse, b, es la altura de estos triángulos y además notemos que en el punto C las distancias a los focos son iguales a a cada una. Entonces, la hipotenusa del triángulo rectángulo es a, por lo que se cumple,

$$a^2=c^2+b^2$$

o lo que es lo mismo, $b^2=a^2-c^2$ Entonces, la ecuación de la elipse queda

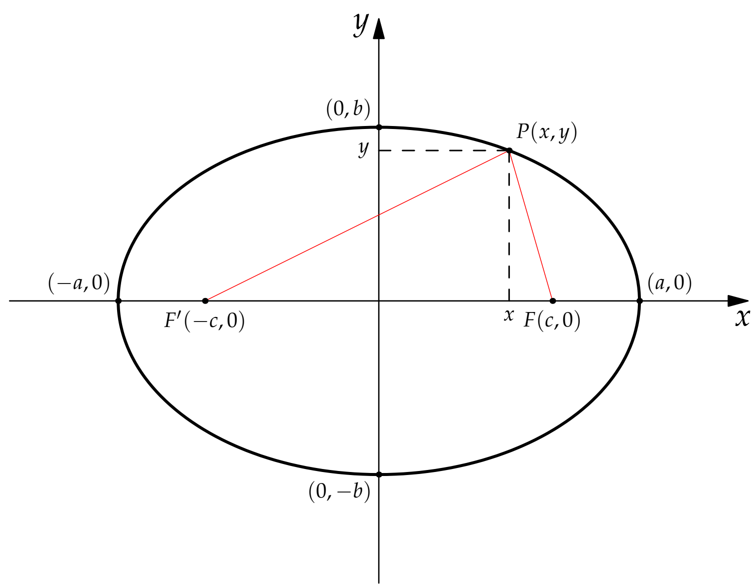
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

llamada ecuación canónica o normal de la elipse con centro en $(0,0)$ y focos en el eje x $(a>b)$.

Elementos distintivos de una elipse

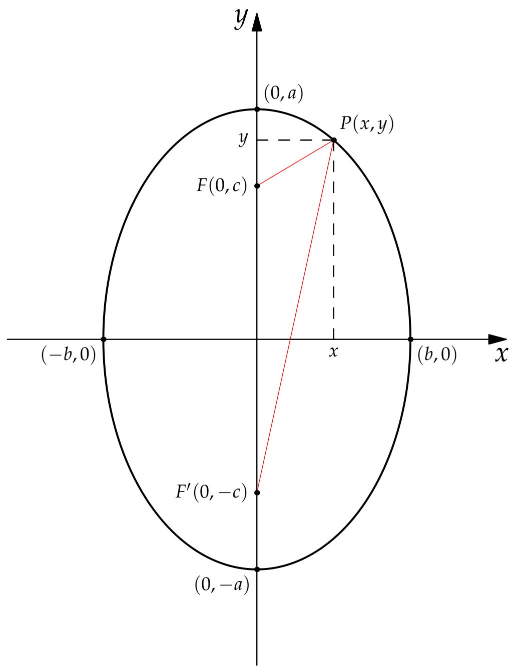
La recta que pasa por los focos corta a la elipse en dos puntos llamados vértices. La cuerda que une los vértices es el eje mayor de la elipse y su punto medio el centro de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor se denomina eje menor y los puntos de la elipse en el eje menor se llaman covértices. a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor. Los vértices son los puntos $(-a, 0)$, $(a, 0)$, y los covértices son $(0, b)$, $(0, -b)$.

Gráfica de la elipse
Hagamos ahora la gráfica en un sistema de ejes coordenados, suponiendo que el centro de la elipse es el origen de tal sistema.



Si los focos están sobre el eje y, y el centro es el origen de coordenadas, razonando en forma similar, podemos deducir que la ecuación normal o canónica

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a > b$$



Excentricidad de la elipse

Se define *excentricidad* de la elipse como el cociente entre c y a, es decir, $e = \frac{c}{a}$.

◊ La circunferencia es un caso particular de elipse con a = b entonces c = 0 ⇒ e = 0

Observa que al estar situados los focos en el eje mayor entre el centro y los vértices, siempre se tiene que

$$0 < c < a \Rightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow 0 < e < 1$$

es decir, las elipses tienen una excentricidad menor a uno.

Si la excentricidad está más cerca de cero la gráfica es más "circular" y si está más cerca de uno resulta más "alargada".

Ejemplo:

Halla la ecuación normal, los vértices y los focos de la elipse

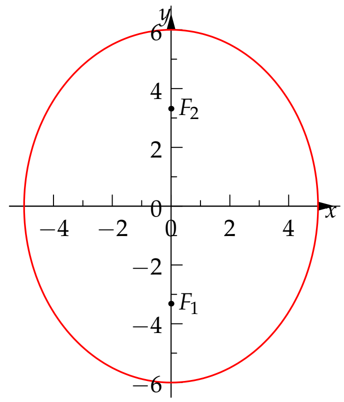
$$4x^2 + \frac{25}{9}y^2 = 100.$$

Grafica indicando los elementos.

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 100 queda $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ o, equivalentemente,

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$

obteniendo la ecuación normal. De ella se deduce que el eje mayor esta contenido en el eje y y tiene por extremos los puntos $(0, -6)$ y $(0, 6)$ que son dos de los vértices. El eje menor está contenido en el eje x y determina los covértices $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Los focos están ubicados en el eje mayor y por lo tanto son puntos del eje y. Calculemos sus coordenadas, sabiendo que y entonces se tiene que $c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 25 = 11$, de donde $c = \pm\sqrt{11}$. Luego $F_1(0, -\sqrt{11})$ y $F_2(0, \sqrt{11})$

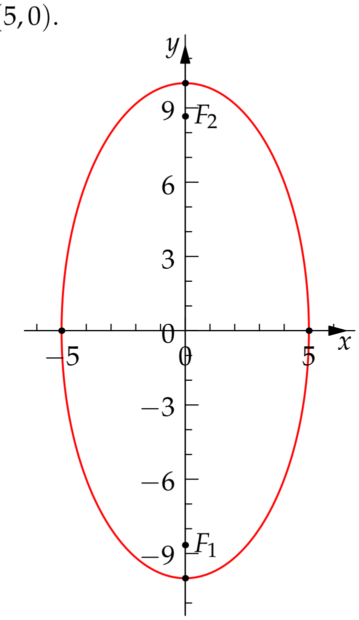


Ejemplo:
Encontrar la ecuación normal de la elipse con focos en los puntos $F_1(0, -5\sqrt{3})$ y $F_2(0, 5\sqrt{3})$ y tal que la longitud del eje mayor sea 20. Graficar la elipse indicando sus vértices.

El eje mayor mide 20, por lo tanto $a = 10$. Conociendo el valor de a y el de c^2 que es 75, sabemos que $b^2 = a^2 - c^2 = 25$, y a partir de esto la ecuación normal de la elipse que buscamos es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Los vértices son los puntos $(0, -10)$, $(0, 10)$, y los covértices $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.



Ecuación de la elipse con centro en un punto (α, β)

Así como observamos en la ecuación de la circunferencia, en el caso de una elipse con centro en el punto (α, β) y ejes paralelos a los ejes coordenados, su ecuación será una de las siguientes:

- De eje mayor horizontal

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

- De eje mayor vertical

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

en ambos casos, a es la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor.

Ejemplo.
Hallar la ecuación canónica de la elipse de ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

Trazar su gráfica identificando los vértices, los focos y el centro. Calcula la excentricidad.

Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados en ambas variables

$$\begin{aligned}
&4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 8 = 0 \\
&4(x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) - 8 = 0 \\
&4(x^2 - 2x + 1) - 4 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 8 = 0 \\
&4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16
\end{aligned}$$

dividiendo por 16 a ambos miembros obtenemos

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

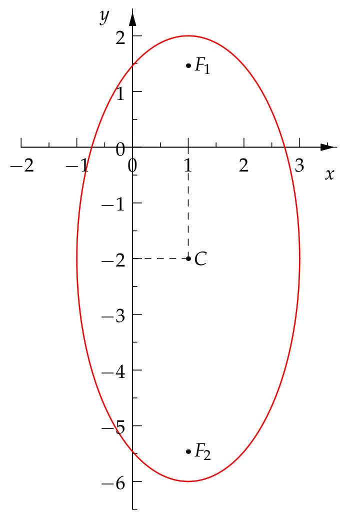
De donde obtenemos que el centro es el punto $(1, -2)$, el valor de $a = 4$, (a es la longitud del semieje mayor, esto nos dice que el eje de la elipse es vertical), el valor de $b = 2$, y el valor de c está dado por:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Y así, los focos están dados por $(1, -2 + 2\sqrt{3})$ y $(1, -2 - 2\sqrt{3})$, los vértices por $(1, -6)$ y $(1, 2)$.

Por último, la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

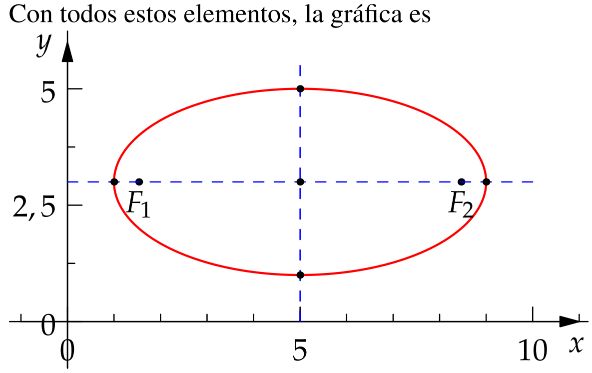
graficamente,



Ejemplo.
Hallar la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(1,3)$ y $(9,3)$ y eje menor de longitud 4.

Como el eje menor es 4, $b = 2$. El centro está ubicado en el $(5,3)$. El eje mayor de la elipse es horizontal y $a = 4$. Con lo cual los otros vértices están en $(5,1)$ y $(5,5)$. Los focos se ubican en $(5+c,3)$ y $(5-c,3)$, donde $c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Con todos estos elementos, la gráfica es




Plaza de San Pedro, Roma.

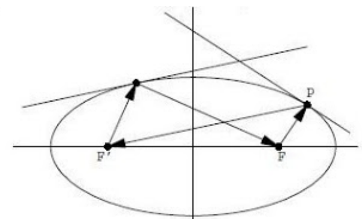
El uso de las elipses.

Más allá de la cuestión estética -aprovechada por los arquitectos del Renacimiento, la elipse tiene una propiedad interesante, a saber.

Un rayo que emana de uno de los focos de la elipse y se refleja en ella pasa por el otro foco; esta propiedad se conoce como la *propiedad de reflexión*.

Esta propiedad era usada en la edad media como un primitivo sistema de espionaje: Cuando a un palacio llegaba una comitiva de un principado o reino vecino, el anfitrión ubicaba a sus invitados en un sitio que era foco de una elipse (salón oval). Así, el dueño de casa se sentaba en el otro foco de la elipse y escuchaba lo que conversaba la comitiva visitante.

Es por esta tradición que todavía se está usando el *salon oval*.



Sistemas de Ecuaciones

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

En ocasiones, no conocemos la edad de dos personas, pero tenemos algunos datos que las relacionan y nos permiten así conocerlas. Supongamos, por ejemplo, que tenemos algunos datos que relacionan las edades de un padre y su hijo.

"Se sabe que la suma de sus edades es 45 años, y que la edad del padre supera en 9 años al triple de la edad del hijo"

Esta situación la podemos modelizar traduciendo en ecuaciones las condiciones dadas. Para ello es necesario explicitar variables numéricas que representen las edades. Al hacerlo, es importante que tengamos en cuenta y describamos con claridad el significado de las mismas y la unidad de medida que utilizamos.

En este caso, llamaremos p a la edad del padre, y h a la edad del hijo, ambas medidas en años.

Con estas variables, es claro que la primera relación expresada puede representarse así:

$$p + h = 45$$

y la segunda:

$$p = 3h + 9$$

Cada una de ellas es una ecuación lineal con dos incógnitas y juntas forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que escribimos así:

$$\begin{cases} p + h = 45 \\ p = 3h + 9 \end{cases}$$

Una vez que hemos representado las relaciones entre p y h, no es difícil hallar las edades de ambos.

De la primera de las ecuaciones tenemos que $h = 45 - p$. De la segunda, obntenemos $3h = p - 9$. En esta última ecuación reemplazamos el h obtenido de la primera,

$$3(45 - p) = p - 9$$

◊ En general decimos que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales , x e y las incógnitas. Encontrar la o las soluciones del sistema significa hallar los valores de los pares (x, y) que verifican ambas ecuaciones.

Entonces,

$$\begin{aligned} p - 9 &= 3 \cdot 45 - 3p \\ p - 9 &= 135 - 3p \\ 4p &= 135 + 9 \\ 4p &= 144 \\ p &= 36 \end{aligned}$$

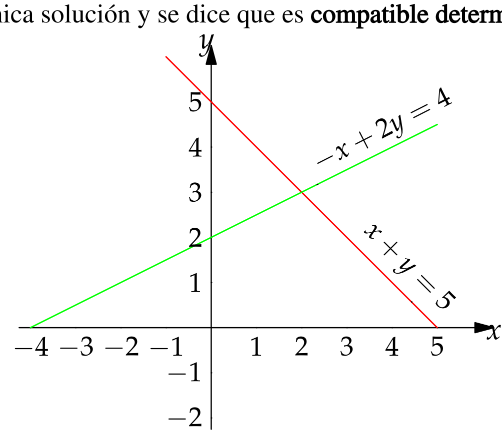
Con el valor de p obtenemos el valor de h, $h = 45 - p = 45 - 36 = 9$

Resolución de sistemas lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

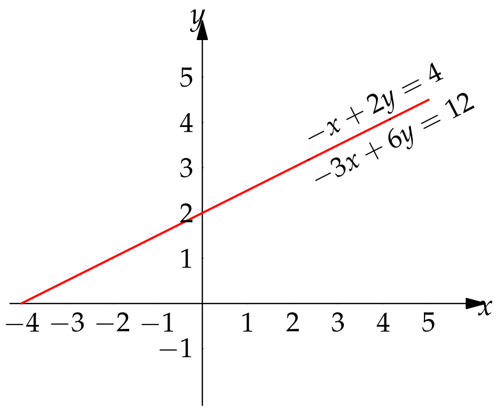
Como vimos en el ejemplo, una vez planteado el sistema de ecuaciones, fue posible hallar los valores de las variables (en este caso, únicos) operando con las ecuaciones. Expondremos más adelante diferentes métodos que permiten resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, basados en el concepto de sistemas equivalentes y operaciones elementales.

Observemos antes de eso, que cada una de las ecuaciones es la ecuación general o implícita de una recta en el plano. Podemos interpretar geométricamente que encontrar la solución de este sistema es encontrar los puntos (x, y) que tienen en común las rectas determinadas por estas dos ecuaciones.

Dadas dos ecuaciones de rectas en el plano, las situaciones que se pueden presentar son:
a) Que las rectas se corten en un punto. En ese caso el sistema tiene una única solución y se dice que es **compatible determinado**. Gráficamente

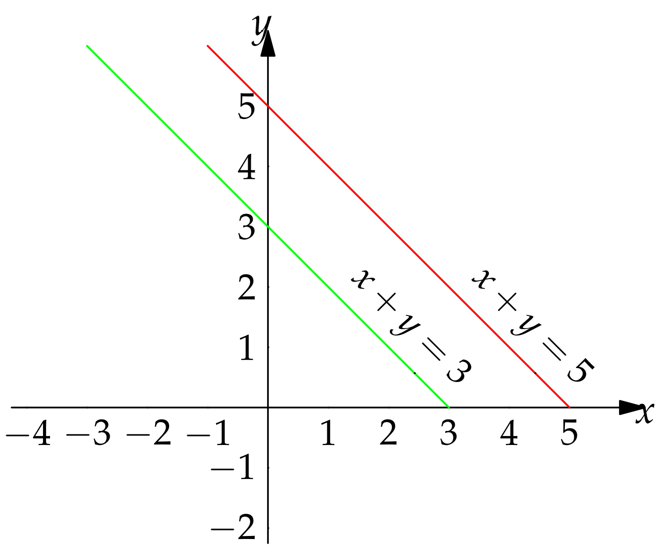


En este caso, el conjunto solución es $S = \{(2, 3)\}$.
b) Que las ecuaciones determinen la misma recta (ecuaciones equivalentes). En ese caso hay infinitas soluciones. Se dice que el sistema es **compatible indeterminado.**



En este caso, el sistema se dice que es compatible indeterminado y
el conjunto solución es $S = \{(x, y) \ / - x + 2y = 4\}$.

c) Que las rectas sean paralelas. En ese caso no hay puntos comunes entre las dos rectas. El sistema no tiene solución y se dice que es **incompatible.**



En este caso, $S = \varnothing$

Métodos de Resolución

Resolver un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas significa encontrar, si existe, un par ordenado (x_s, y_s) tal que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente.

Esto significa, que partiendo de un sistema en general,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

debemos ser capaces de establecer un método que nos conduzca a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_s \\ y = y_s \end{cases}$$

Ahora bien, este recorrido debe ser tal que no modifique la solución, o lo que es lo mismo, que cada sistema de ecuaciones que forme parte de este recorrido tenga la misma solución del sistema original. Estos sistemas se conocen como *sistemas de ecuaciones equivalentes*.

Sistemas Equivalentes y operaciones elementales

Dos **sistemas de ecuaciones** algebraicas son **equivalentes** si y sólo si tienen el mismo conjunto solución.
Podemos obtener un sistema equivalente a uno dado, aplicando las siguientes operaciones elementales:
• Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número real no nulo.
• Reemplazar una de las dos ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones del sistema.

En nuestro problema de las edades de padre y del hijo, siendo p: la edad, en años, del padre, h: edad, en años, del hijo, teníamos

$$\begin{cases} p + h = 45 \\ p = 3h + 9 \end{cases}$$

Vamos a aplicar las operaciones elementales mencionadas para resolver este sistema.

Multiplicamos por 3 la primera ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3p + 3h = 135 \\ p - 3h = 9 \end{cases}$$

Reemplazamos la primera ecuación por la suma de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 4p = 144 \\ p - 3h = 9 \end{cases}$$

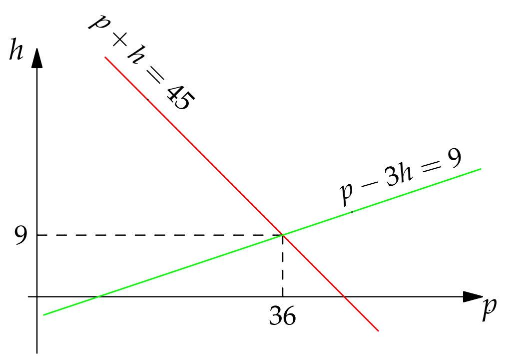
multiplicando por $1/4$ la primera, tenemos:

$$\begin{cases} p = 36 \\ p - 3h = 9 \end{cases}$$

Ahora, sabiendo que $p = 36$, finalmente encontramos el valor de h, reemplazando el valor de p en la segunda ecuación. De ahí que $h = 9$.

Podemos ahora dar la solución al problema, respondiendo que el padre tiene 36 años y el hijo 9 años. El conjunto solución S está formado por el único par $(36, 9)$. El conjunto solución es $S = \{(36, 9)\}$

Gráficamente



Repasaremos los siguientes métodos

- Método de Sustitución.
- Método de Igualación.
- Método de Sumas y Restas.

Vamos a resolver el siguiente sistema, utilizando los tres métodos

$$\begin{cases} x - y = -7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

a) Método de sustitución

$$\begin{cases} x - y = -7 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas de una de las ecuaciones, por ejemplo, de (2)

$$y = 1 - 2x \qquad (*)$$

Sustituimos en (1)

$$x - (1 - 2x) = -7$$

resolvemos esta ecuación lineal

$$x - 1 + 2x = -7$$

$$3x - 1 = -7$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

Reemplazando en (*)

$$y = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$$

Entonces, S=$\{(-2, 5)\}$. El sistema es compatible

a) Método de igualación. Para el mismo sistema determinado.

$$\begin{cases} x - y = -7 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Despejamos de ambas ecuaciones la misma incógnita, por ejemplo "y" de (1)

$$y = x + 7$$

de (2)

$$y = 1 - 2x$$

Igualando, obtenemos

$$x + 7 = 1 - 2x$$

resolviendo esta ecuación lineal,

$$3x = -6$$

de donde

$$x = -2.$$

Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones donde estaba despejada "y" obtenemos $y = 5$. Nuevamente, $S = \{(-2, 5)\}$

c) Método de Sumas y restas. Para el mismo sistema

$$\begin{cases} x - y = -7 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos por un número conveniente para que una misma incógnita tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, de modo que al sumar o restar las ecuaciones, miembro a miembro, quede una ecuación con una incógnita.

Aquí podemos multiplicar por 2 a ambos miembros de (1)

$$\begin{cases} 2x - 2y = -14 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

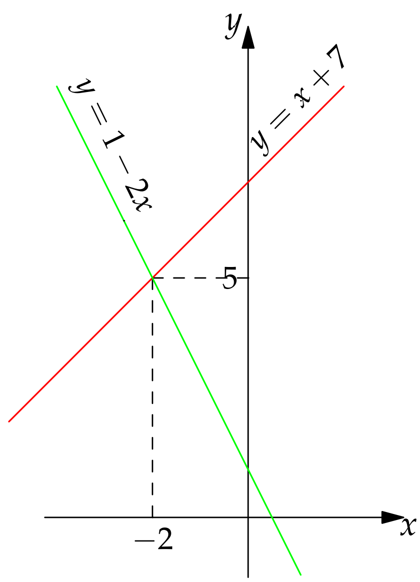
Si a la primera ecuación le restamos la segunda obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} -3y = -15 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

de donde obtenemos $y = 5$.

Reemplazando el valor obtenido para y en la segunda ecuación, obtenemos $x = -2$ por lo que el conjunto solución es $S = \{(-2, 5)\}$

Gráficamente



$\Diamond$ Otra manera de resolver el sistema es sumar (1) + (2) con lo cual se obtiene:

$$3x = -7 + 1 = -6$$
$$\Rightarrow \quad x = -2$$

y reemplazando en la ecuacion (1) obtenemos $y = 5$.

Un sistema con infinitas soluciones

Veamos ahora el siguiente sistema

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$$

Usaremos el Método de Sustitución, despejando x de la primera ecuación se tiene:

$$x = -1 + 2y \quad (*)$$

reemplazando en la segunda ecuación

$$-3(-1+2y)+6y=3$$

resolviendo ésta última, obtenemos:

$$0y=0$$

Es claro que cualquier valor de y es solución de esta ecuación, esto significa que la variable y puede ser cualquier número real y el correspondiente valor de la variable x se obtendrá reemplazando ese valor de y en $(*)$

Por ejemplo

Si $y=1$, $\ x=-1+2\cdot 1=1$, entonces el par $(1,1)$ es solución.

Si $y=0$, $\ x=-1+2\cdot 0=-1$, entonces el par $(-1,0)$ es solución.

Si $y=-1/2$, $\ x=-1+2\cdot(-\frac{1}{2})=-2$, entonces el par $(-2,-\frac{1}{2})$ es solución

Si $y=100$, $\ x=-1+2\cdots 100=199$, entonces el par $(199,100)$ es solución.

Y éstas son sólo algunas de las infinitas soluciones del sistema.

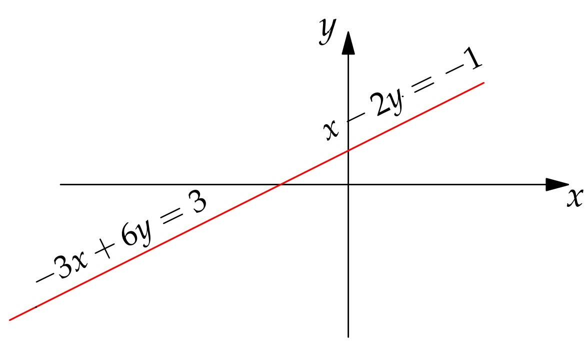
Si $y=a$, con a real, $x=-1+2a$, entonces el par $(-1+2a,a)$ es solución

Como no podemos escribir a todas las soluciones en una lista, expresamos el conjunto solución de la siguiente manera:

$$S=\{(-1+2a,a),\quad \text{con } a\in\mathbb{R}\}$$

Y decimos que el sistema es compatible indeterminado

Gráficamente, el conjunto solución es la recta determinada por ambas ecuaciones (ya que el sistema es compatible indeterminado si y solamente si las ecuaciones son equivalentes).



Consideremos ahora un ejemplo en el cual analizamos un sistema que no tiene solución

Consideremos ahora el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ -3x+6y=7 \end{cases}$$

Usaremos el Método de Sustitución, despejando x de la primera ecuación:

$$x = -1 + 2y \qquad (*)$$

reemplazando en la segunda ecuación

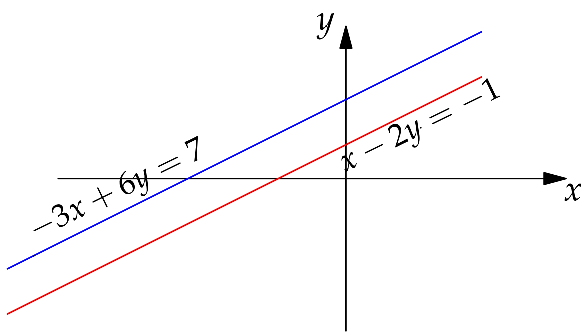
$$-3(-1 + 2y) + 6y = 7$$

Resolviendo, obtenemos

$$0y = 4$$

Es claro que ningún valor de y verifica esta ecuación, por lo tanto el sistema no tiene solución. Es Incompatible, y su conjunto solución es vacío. $S = \varnothing$

Gráficamente, dibujamos las rectas correspondientes a las dos ecuaciones y vemos que son paralelas.



Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Consideremos ahora la siguiente situación:

"Una persona afirma tener 1060$ en billetes de 5$, 10$ y 50 $. La cantidad de billetes de 50$ es los dos tercios de la cantidad de los de 10$ y en total tiene 65 billetes. ¿Es esto posible? Si lo es, determina cuántos billetes de cada tipo tiene."

Si llamamos
x: cantidad de billetes de 5$
y: cantidad de billetes de 10$
z: cantidad de billetes de 50$
Entonces podemos plantear

$$\begin{cases} x+y+z=65 & (1) \\ z=\frac{2}{3}y & (2) \\ 5x+10y+50z=1060 & (3) \end{cases}$$

Observemos que en (2) ya tenemos despejada z en términos de y. De (1)

$$x = 65 - y - z$$

$$x = 65 - y - \frac{2}{3}y$$

de donde tenemos también x en términos de y

$$x = 65 - \frac{5}{3}y$$

Ahora vamos a reemplazar las expresiones de x y de z en (3)

$$5\left(65 - \frac{5}{3}y\right) + 10y + 50\left(\frac{2}{3}y\right) = 1060$$

$$325 - \frac{25}{3}y + 10y + \frac{100}{3}y = 1060$$

$$\frac{-25+30+100}{3}y = 1060 - 325$$

$$\frac{105}{3}y = 735$$
$$35y = 735$$

de donde $y = 21$

Sabíamos que $z = \frac{2}{3}y = 14$ y para x tenemos que $x = 65 - y - z = 65 - 21 - 14 = 30$ Entonces, el conjunto solución es

▲ Observación.
EL conjunto solución $S = \{(30, 21, 14)\}$ tiene un solo elemento denominado *terna*. Es decir, decimos que el sistema admite una única solución.

$$S = \{(30, 21, 14)\}$$

Podemos responder entonces la pregunta del problema planteado: la persona tiene 30 billetes de 5\$, 21 billetes de 10\$ y 14 billetes de 50\$.

Podemos decir que un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

con $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$

De manera análoga con lo que ocurre con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, en los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas nos encontramos con las mismas tres posibilidades

- Solución única.
- Infinitas soluciones.
- No tiene solución.

Resolución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Para resolver un sistema de este tipo, se utilizan los métodos descriptos anteriormente para sistemas de dos por dos. Una manera que puede ser útil, para trabajar en forma ordenada, es despejar de una de las ecuaciones una de las incógnitas, y reemplazar en las otras dos ecuaciones. De esta manera se llega a un sistemas de dos por dos, que ya sabemos resolver.

Por ejemplo resolvamos:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 5y + z = 10 \\ -3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos $z = -2 + 2x + y$ Reemplazamos en las otras dos:

$$x + 5y + (-2 + 2x + y) = 10$$

$$-3x - y + 2(-2 + 2x + y) = -1$$

Operando, formamos el sistema

$$\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ x + y = 3 \\ z = -2 + 2x + y \end{cases}$$

Mirando este sistema puede verse que las dos primeras ecuaciones sólo dependen de las variables x e y. Por lo tanto, puede resolverse como un sistema de dos por dos. Resolviendo por cualquiera de los métodos que conocemos, encontramos que $x = 2$, $y = 1$.

Con estos valores, sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos que $z = 3$.

De modo que, el sistema tiene solución única, y conjunto el solución es $S = \{(2, 1, 3)\}$. Es un sistema compatible determinado.

En los sistemas de ecuaciones lineales de más de tres ecuaciones y más de tres incógnitas se verifica también que son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles. Para su resolución hace falta sistematizar los métodos, esto se desarrolla en el curso de Matemática C.

Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Supongamos que queremos encontrar dos números, cuya suma es 1, y la suma de los cuadrados de dichos números es 25. Llamando x e y a los números, podemos plantear:

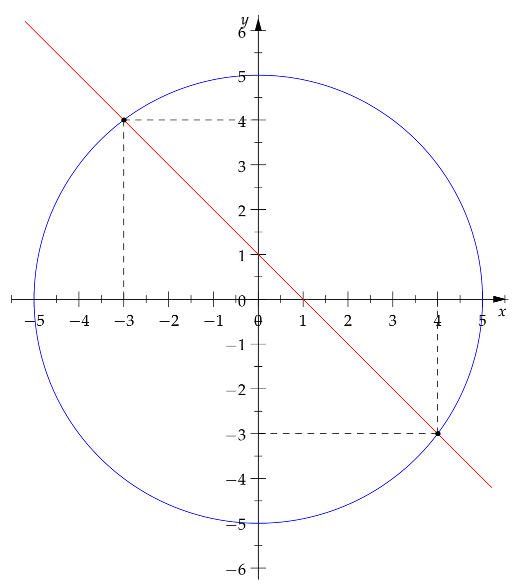
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Se dice que un sistema es mixto cuando al menos una de la ecuaciones no el lineal (en este caso la segunda ecuacion es cuadratica).

Interpretación geométrica

La primera ecuación $x + y = 1$ es una ecuación lineal, cuya gráfica es una recta. La segunda ecuación $x^2 + y^2 = 25$ es la ecuación de una circunferencia con centro en el $(0, 0)$ y radio 5.

Si graficamos



podemos observar que la interpretación geométrica de este sistema es que la solución del mismo consiste en las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas representadas por cada ecuación.

Resolución

De la ecuación lineal, obtenemos $y = 1 - x \quad (*)$, reemplazando en la segunda ecuación

$$x^2 + (1-x)^2 = 25$$

desarrollando el cuadrado del binomio

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$

Dividiendo por 2, obtenemos una ecuación equivalente

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Resolviendo se llega a $x = 4$ ó $x = -3$ Si $x = 4$, reemplazando en (*), $y = 1 - 4 = -3$

Si $x = -3, y = 1 - (-3) = 4$, por lo tanto el conjunto solución es $S = \{(4, -3), (-3, 4)\}$

Pero debemos tener en cuenta el contexto de nuestro problema. Es claro, entonces, que los números buscados son -3 y 4, ya que no interesa el orden en el que los demos.

◊ En los sistemas mixtos, en general conviene despejar una de las variables de la ecuación lineal y reemplazar en la otra ecuación.

Con respecto a este tipo de sistemas, definimos

◊ Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales son de utilidad para resolver los no lineales. La elección del método dependerá de cada sistema en particular.

Los sistemas de ecuaciones en los que algunas de las mismas no es lineal se los denomina *no lineal*.

Consideremos otro ejemplo.
a) Hallar analíticamente los puntos de intersección entre las cónicas de ecuaciones $y = -x^2 + 3$, $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$
b) Interpreta gráficamente marcando claramente dichos puntos.

Solución.
a) Los puntos de intersección serán las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación

$$x^2 = 3 - y \qquad (*)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$3 - y + y^2 - 8y + 15 = 0$$

resolviendo esta ecuación de segundo grado encontramos que sus soluciones son $y = 6$ ó $y = 3$

Estos valores "serían" las ordenadas de los puntos de intersección. Tratemos de encontrar las abscisas de esos puntos en (*) $x^2 = 3 - y$
Si $y = 6$ entonces $x^2 = 3 - 6 = -3$, lo que nos dice que no existe $x \in \mathbb{R}$ que verifique esta ecuación.
Si $y = 3$, entonces $x^2 = 3 - 3 = 0$, de donde $x = 0$

Por lo tanto el único punto en común que tienen ambas gráficas es el $(0, 3)$.

El conjunto solución del sistema es $S = \{(0, 3)\}$
b) Sabemos que $y = -x^2 + 3$ es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 3)$, eje de simetría $x = 0$ (el eje y) y ramas hacia abajo.

Para la ecuación $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$ vamos a completar cuadrados para llevarla a su forma canónica o normal, pero podemos pensar que se trata de la ecuación de una circunferencia,

$$x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$$

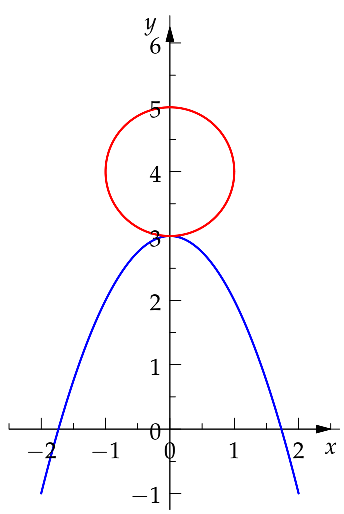
Completamos cuadrados en la variable y

$$x^2 + y^2 - 8y + 16 + 15 = 16 \qquad \text{(sumamos 16 a ambos miembros)}$$

$$x^2 + (y - 4)^2 = 1$$

Es la ecuación de una circunferencia con centro en $(0, 4)$ y radio 1.

Graficamos y vemos que la solución hallada analíticamente concuerda con la hallada gráficamente.



Ejercicios de la Parte III

Rectas

1. Determina la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = 2$ y pasa por el punto $(5, -1)$. Grafica la recta pedida.
2. Escribe la ecuación de la recta determinada por el siguiente par de puntos $(0, 7)$ y $(-2, 1)$.
3. Escribe las ecuaciones de las rectas que contienen a cada uno de los lados del triángulo cuyos vértices son: (2, 1); (0, 2) y $(-3, -4)$.
4. Grafica la recta cuya ecuación es $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Observa en que puntos corta a los ejes coordenados. Esta forma de expresar la recta recibe el nombre de ecuación segmentaria.
5. Dada la recta $3x - 2y = 23$, escríbela en forma segmentaria, indica los puntos de corte con los ejes coordenados y luego dibújala.
6. Escribe la ecuación de la recta paralela y de la recta perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x + 1$ que pase por el punto P (4, 0). Dibuja la recta dada y las dos que hallaste en un mismo sistema de ejes coordenados.
7. Selecciona entre las siguientes ecuaciones, las que representan rectas perpendiculares. Justifica tu respuesta y grafícalas.
    a) $y = 3x - 5$
    b) $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}$
    c) $y = -3x + 5$
    d) $\frac{y}{3} + x = 1$
    e) $y + 5x = 0$

8. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta de ecuación $7x - 5y + 11 = 0$. Grafica la recta dada.
9. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta es $6x + y - 3 = 0$. Escribe su ecuación segmentaria y grafícala.
10. Determina la distancia entre los puntos (1, 2) y (4, 6).
11. La recta de ecuación $y = 5x - 3$ corta al eje x en el punto A y corta al eje y en el punto B. Calcula la distancia entre A y B. Grafica la recta y marca los puntos A y B.
12. Determina el área y el perímetro del triángulo formado por el origen de coordenadas y los puntos $P(0, 4)$ y Q(−3, 0).

Cónicas

1. Determina la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1, 3)$ y foco en $(2, 3)$.
2. Determine la ecuación canónica de la parábola cuya directriz es paralela al eje y, y pasa por los puntos $(0, 0), (-1, 2), (-1, -2)$.
3. Determine la ecuación canónica de la parábola $-9y^2 - 8x - 3 = 0$.
4. Determine la ecuación canónica de la parábola con foco en $(-1, 1)$ y directriz de ecuación $y = 5$.
5. Determina la ecuación de la circunferencia para los siguientes datos. Para cada caso grafica.

   a) Centro en el $(-1, 3)$ y de radio 2.

   b) Centro en el $(1, 1)$ y de radio $\sqrt{3}$

   c) Centro en el $(1, 2)$ que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la circunferencia.
6. Determina el centro y el radio de la circunferencia representada por la ecuación

   a) $2x^2 + 4x + 2y^2 = 0$

   b) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = -6$

   c) $x^2 - 2x + y^2 = 0$
7. Completando cuadrados lleva la ecuación a su forma canónica, decide si es una elipse o una circunferencia, determina sus elementos y grafica:

   a) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 12 = 0$

   b) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$

   c) $x^2 + 9y^2 + 2x = 8$
8. Determina la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con:

   a) centro en $(1, -2)$, con eje mayor horizontal 8 y excentricidad ¾.

   b) con centro en $(0, 0)$, eje mayor horizontal y en la que los puntos $(3, 1)$ y $(4, 0)$ están en la elipse.

   c) con centro en $(2, 1)$ y longitud 5 del eje mayor vertical y longitud 2 del eje menor.

   En todos los casos grafica las elipses pedidas.
9. Determina y clasifica, llevando a su forma canónica, cada una de las siguientes cónicas:

   a) $y^2 - 6y + 9 - 4x = 0$

   b) $16x^2 + y^2 - 4y = -3$

   c) $5x^2 + 5y^2 - 10y + 1 = 0$

   d) $x^2 - 12x + 40 - 40y = 0$

   e) $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2x$

Sistemas de Ecuaciones

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=\frac{2}{3} \\ x-\frac{1}{3}y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=\frac{2}{3}x-y \\ x-\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}x-1 \end{cases}$

2. Escribe la ecuación de la recta en las formas $y=mx+b$ que pasa por los puntos dados. Grafica.

a) $P(0,1)$ y $Q(1,3)$

b) $P(0,0)$ y $Q(1,2)$

3. Encuentra el punto $P(x,y)$ donde la recta de ecuación $y = 2x + 1$ se intersecta con la recta que pasa por los puntos $Q(1,1)$ y $R(2,5)$. Grafica.

4. Encuentre el valor de k para que el sistema se compatible

$$\begin{cases} 2x+y+1 = 3(y+1)+x \\ 3x-3y=k+3y \end{cases}$$

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-4y=k \end{cases}$$

Para qué valor o valores de la constante k, el sistema:

a) No tiene solución.

b) Tiene infinitas soluciones.

c) Tiene exactamente una solución.

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=0 \\ -x+2y-z=1 \end{cases}$

7. Problemas

a) En un estadio de fútbol hay 15000 personas y se sabe que la cantidad de hombres duplica a la de mujeres. Determinar cuántas mujeres y hombres hay.

b) Un automóvil recorre -en ruta- 15 kilómetros con un litro de nafta. En la ciudad, consume 10 litros por cada 100 kilómetros. Si consumió 30 litros recorriendo 400 kilómetros, ¿Cuántos kilómetros hizo en ruta y cuántos en ciudad?

c) Dos hamburguesas y un cono de papas fritas contienen en total 850 calorías. Tres hamburguesas y dos conos de papas suman 1390 calorías. Determina el contenido calórico de cada uno de estos alimentos.

d) Hace 14 años la edad de Catalina era 8/7 de la edad de Ema y hoy Ema es 5 años menor que Catalina. Modeliza la situación y averigua cuáles son sus edades actuales.

e) Cuarenta alumnos deben hacer un práctico en las computadoras del laboratorio Gioia o en las del laboratorio Barcala. En Gioia pueden practicar 8 alumnos por turno y en el Barcala 2 alumnos por turno; el número de turnos disponibles del Barcala supera en 10 al número de turnos disponibles del Gioia. ¿Cuántos turnos de laboratorio Gioia y cuántos del Barcala se ocuparán?

f) Mario compró dos objetos cuyos costos son tales que su suma es igual a los 11/2 de su diferencia. Por otra parte, el más caro cuesta $20 menos que el doble del otro ¿Cuánto le costó cada objeto?

Sistemas no lineales

1. Encuentre analíticamente el o los puntos de intersección en los siguientes sistemas de ecuaciones e interprete gráficamente

   a) $\begin{cases} x^2 + y + 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(x-1) - y = 0 \\ x - y = -3 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

2. Encuentra el/los valores que debe tener la pendiente de la recta que pasa por el origen para que comparta con la parábola de ecuación $y - x^2 - 1 = 0$ un solo punto. Arma las ecuaciones correspondientes y grafica la parábola, las rectas y los puntos de intersección.

3. Encuentra analíticamente y gráficamente (aproximadamente) los puntos en los que se intersectan los siguientes conjunto:

   a) La circunferencia de centro *C*=(1, 1) y radio 1, con la parábola $x^2 - y = 1$

   b) La recta de ecuación $y - x = 2$, con la parábola $(y-2)^2 = 8$

   c) La elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, con la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$.

4. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = k \end{cases}$$

   ¿Es posible determinar un valor de k para que este sistema tenga una solución única? ¿Y para que tenga dos soluciones? ¿Y para que no tenga soluciones?

   Pista: Para entender bien la situación, puedes empezar graficando junto con la curva que corresponde a la primera ecuación, las rectas que correspondan a la segunda ecuación para varios valores particulares de k.

5. Problemas

a) Hallar dos números enteros tales que su suma sea 7 y la suma de sus cuadrados 25.

b) Hallar dos números enteros tales que si los multiplicamos da 184 y al dividir el mayor con el menor da como cociente 2 y resto 7.

c) Hallar los números enteros x e y sabiendo que la suma del doble del primero con el tercio del segundo da 5 y que la diferencia entre el triple del inverso multiplicativo del primero con 18 veces el inverso multiplicativo del segundo da 1.

d) De un rectángulo se sabe que su perímetro es de 28 centímetros y que su diagonal es 2 centímetros mayor que su lado mayor. Hallar el área del rectángulo.

e) Determina un número de tres cifras tal que la suma de las tres cifras es 20, el cuadrado de la segunda cifra es igual a la suma de las otras dos y la diferencia entre el número y el que se obtiene invirtiendo las cifras es 198.

Parte IV

Trigonometría

Medición de ángulos

Introducción histórica

Lo que entendemos por trigonometría tiene un origen hace alrededor de 4000 años cuando los babilonios y más tarde los egipcios utilizaban relaciones entre ángulos para medir terrenos y determinar alturas. En el caso egipcio, la construcción de las pirámides es un momunento a la trigonometría.

La denominación trigonometría proviene de una cultura posterior, la griega, cuyas palabras trigonos ($\tau\rho\iota\gamma o\nu o\sigma$) metria ($\mu\epsilon\tau\rho o\sigma$) lo que significa *medición de ángulos*.

En Grecia, Hiparco de Nicea, construyó una tabla de cuerdas para resolver triángulos la cual fué de mucha utilidad en Astronomía.

Esto significa que lo que hoy entendemos por trigonometría es mucho más que la mera medición de ángulos. La matemática moderna llama *trigonometría* al conjunto de relaciones que involucran ángulos. Más aún, lo que entendemos por trigonometría está más relacionado a las funciones trigonométricas, sen, cos, etc. que a la mera medición de los ángulos en cuestión.

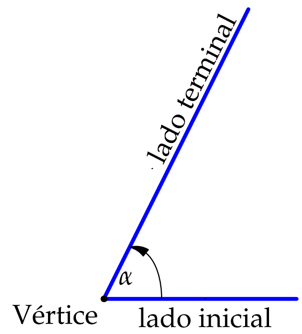
Actualmente, la trigonometría es utilizada en varias ramas de la ciencia. En particular en la ingeniería las obras civiles, la medición de terrenos (agrimensura), las señales electromagnéticas son representadas por funciones trigonométricas.

En este capítulo estudiaremos las relaciones trigonométricas, pero para ello es necesario hacer un repaso de los conceptos y definiciones que construyen el cuerpo conceptual de la trigonometría. Analizaremos propiedades de las funciones trigonométricas, sus aplicaciones para resolución de triángulos y aplicaciones a problemas.

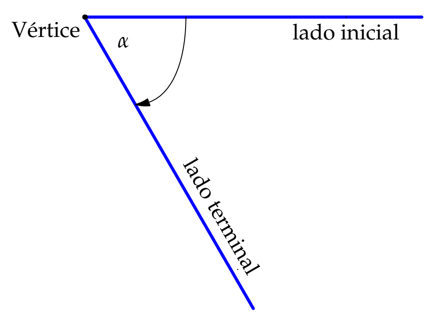
La resolución de triángulos ya no se restringirá a triángulos rectángulos, ya que la aplicación del Teorema del seno y del teorema del coseno nos permitirá resolver cualquier tipo de triángulo.

Ángulos. Definiciones y sus medidas

Un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o **vértice**. Suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal.



Designamos uno de los dos segmentos o semirrectas, como el **lado inicial** del ángulo y al otro lo llamamos **lado terminal**. Se considera el ángulo como el resultado de una rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal como positivo si se realiza en sentido contrario a las agujas del reloj.
Si el ángulo lo medimos en el sentido horario decimos que el ángulo es negativo, según la siguiente figura



en este caso, decimos que el ángulo es negativo.

La orientación de los ángulos no es parte de los orígenes de la trigonometría, ya que lo que interesaba principalmente era el valor absoluto de los ángulos y no tanto cómo se lo medía.

Retomaremos estas ideas en el capítulo de la *trigonometría en sistemas de coordenadas.*

Puesto que en este capítulo trabajaremos con ángulos, es necesario revisar los diferentes sistemas de medición de los mismos. Tanto para el cálculo a mano o calculadora siempre será fundamental tomar conciencia en el sistema de medición de ángulos que estamos trabajando. Esto constituye una fuente de errores importante a la hora de los cálculos con calculadora.

El sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal es un sistema creado por los babilonios hace alrededor de 4000 años y consiste en la división de la circunferencia en 360°. De esta manera, se define el *grado* como

$$1^\circ = \frac{1\ rotacion\ completa}{360}$$

Además, esta manera de particionar la circunferencia establece las graduaciones menores al grado en minutos y segundos, las cuales se obtienen particionando en 60 al grado y al minuto respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} 1' &= \frac{1^\circ}{60} \\ 1'' &= \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600} \end{aligned}$$

Este sistema de numeración tiene por base 60. Nosotros, en nuestra cotideaneidad estamos familiarizados al sistema decimal, por lo que no nos resulta familiar usar este sistema. Solamente usamos este sistema en dos aspectos de nuestras vidas:

- La hora. En efecto, cada hora son 60 minutos y cada minuto, 60 segundos. En este caso, el día es dividido en 24 horas.
- Los ángulos.

El uso de la base 10 está basado en la cantidad de dedos que tenemos en las manos. Sin embargo, existen autores que afirman que el origen de la base 60 también se explica a través de contar con las manos. Es decir, que con las manos se puede contar hasta 60. Esta relación se obtiene a

partir de una manera de contar que consiste en lo siguiente: Con una mano se cuenta con el pulgar las tres falanges de cada dedo. Como me quedan cuatro dedos, podré contar hasta doce. Una vez alcanzado los doce, con los dedos de la otra mano se va almacenando la cantidad de 12 que conté con la primera. De esta manera, con ambas manos podré contar hasta 5 docenas, es decir, hasta 60.

Álgebra en base 60

Qué sistema de numeración podrían haber ideado los Simpsons?

Operar en base 60 tiene particularidades similares a la base 10, sólo que los conceptos de unidad, decena y centena deben reformularse a grado minuto y segundo.

Cuando operamos entre números en base 10 debemos tener en cuenta que cuando superamos el 9 de las unidades incorporamos un número a las decenas y cuando superamos el nueve en las decenas sumamos un número a las centenas y así sucesivamente.

En base 60, lo que equivaldría a la unidad es el segundo. De esta manera, cuando se supera 59, se suma un número al minuto. Si se supera 59 minutos se suma 1 a la unidad siguiente (grado, para ángulos y horas para la hora). Y así sucesivamente.

Suma en base 60

En virtud de que nuestro enfoque está orientado a la trigonometría, haremos apenas algunas observaciones respecto a la suma y al producto en base sexagesimal.

Suma

El algoritmo para sumar en base sexagesimal se basa en un esquema de posiciones. Si por ejemplo queremos sumar los ángulos $\alpha = 10^\circ\ 19'\ 50''$ con el ángulo $\beta = 15^\circ\ 40'\ 30''$

Dispongamos los ángulos para sumarlos y sumemos directamente

$$\begin{array}{cccc} & 10^\circ & 19' & 50'' \\ + & & & \\ & 15^\circ & 40' & 30'' \\ \hline & 25^\circ & 59' & 80'' \end{array}$$

Ahora, como $80''$ se pasa de $59''$ debemos utilizar $60''$ para adicionar en los minutos y quedarnos con $20''$. Obtenemos

$$\begin{array}{cccc} & 10^\circ & 19' & 50'' \\ + & & & \\ & 15^\circ & 40' & 30'' \\ \hline & 25^\circ & 59' + 1' = 60'' & 20'' \end{array}$$

Nuevamente, $60'$ se pasa de $59'$, con lo que debemos utilizar $60'$ para adicionar a los grados

★ Para pensar.
Cómo operarías con números negativos?

$$\begin{array}{cccc} & 10^\circ & 19' & 50'' \\ + & & & \\ & 15^\circ & 40' & 30'' \\ \hline & 25^\circ + 1^\circ = 26^\circ & 0' & 20'' \end{array}$$

Con lo que la operación debería escribirse

$$\begin{array}{cccc} & 10^\circ & 19' & 50'' \\ + & & & \\ & 15^\circ & 40' & 30'' \\ \hline & 26^\circ & 0' & 20'' \end{array}$$

Alpica lo aprendido.
Calcula
$(25^\circ\ 40'\ 57'') + (15^\circ\ 55'\ 3'')$

finalmente, podemos escribir $\alpha + \beta = (10^\circ\ 19'\ 50'') + (15^\circ\ 40'\ 30'') = 26^\circ\ 0'\ 20''$

Producto por un número natural

Para multiplicar un número en base sexagesimal con un número natural, lo disponemos en la forma de multiplicación, pero luego ordenamos los minutos y segundos en función de la base 60.

Ejemplo, para hacer la operación $(25^\circ\ 40'\ 31'') \times 3$ escribimos

$$\begin{array}{ccc} 25^\circ & 40' & 31'' \\ & \times & 3 \\ \hline 75^\circ & 120' & 93'' \end{array}$$

ordenando las cifras para expresarlas en base 60 obtenemos

$$\begin{array}{ccc} 25^\circ & 40' & 31'' \\ & \times & 3 \\ \hline 77^\circ & 1' & 33'' \end{array}$$

Pasaje de sexagesimal a decimal.

Dado que una vez que llegamos a la unidad de grado (para ángulos) u hora (para el tiempo) no tenemos más limitaciones con relación a la base, puesto que podemos superar el 60 y dejar la expresión como está. Esto significa que el sistema de medición de ángulos no es estrictamente hablando un sistema sexagesimal, puesto que la base 60 sólo se restringe a los minutos y segundos.

Por lo que pasar a decimal significará dejar expresado el ángulo como grado y su fracción. Para realizar esta operación sólo se debe tomar en cuenta lo que planteamos al comienzo del capítulo: $1' = \frac{1^\circ}{60}$ y $1'' = \frac{1^\circ}{3600}$. Estas relaciones son las que utilizamos para escribir un número en término de grado.

Como ejemplo, consideremos el ángulo $1^\circ\ 30'$. Como $1' = \frac{1^\circ}{60}$, tendremos que $30' = \frac{30^\circ}{60} = \frac{1}{2} = 0.5$

Con lo que tenemos

$$1^\circ\ 30' \ = 1.5^\circ$$

Aplica lo aprendido.
comprueba que

$$25^\circ\ 7'\ 30'' = 25.125^\circ$$

El sistema circular. El Radián

Consideremos una circunferencia de radio r (diámetro d). El cálculo de la longitud, es decir, del perímetro, lo obtenemos a partir de la relación

$$\ell = \pi\ d$$

o, en término del radio,

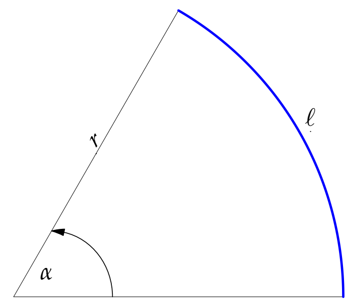
$$\ell = \pi\ (2\ r) = 2\,\pi\,r$$

Por lo general, usaremos para el perímetro (o longitud) de la circunferencia la expresión

$$\ell = 2\ \pi\ r$$

Ahora, si queremos calcular un arco de circunferencia, cómo lo haríamos?

La respuesta a esta pregunta nos obliga a establecer una relación entre el ángulo y la longitud.



A partir de la figura, notemos que

- Si $\alpha = 360^\circ$, entonces $\ell = 2\pi r$
- Si $\alpha = 180^\circ$, entonces $\ell = \frac{2\pi r}{2} = \pi\, r$
- Si $\alpha = 90^\circ$, entonces $\ell = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2}\, r$

★ Notemos que el cociente

$$\frac{\alpha}{360^\circ}$$

corresponde a la fracción de circunferencia correspondiente al ángulo α. En efecto, $\frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$ de circunferencia, $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ de circunferencia y así sucesivamente.

Lo que significa, que la longitud de arco es directamente proporcional al ángulo en cuestion. Con lo que podemos calcular la longitud de arco de circunferencia correspondiente a un ángulo α como

$$\ell_\alpha = \underbrace{\frac{\alpha}{360^\circ}}_{fraccion\ de\ circunferencia} \times 2\,\pi\, r$$

A partir de esta igualdad, definimos como *ángulo en radián* a la relación entre el arco de la circunferencia con respecto al radio,

$$\alpha[rad] = \frac{\ell_\alpha}{r} = \frac{\alpha[^\circ]\,2\,\pi}{360^\circ}.$$

Con esta definición, obtenemos

$$\ell_\alpha = \underbrace{\left(\frac{\alpha[^\circ]\,2\,\pi}{360^\circ}\right)}_{angulo\ en\ radian} \times r$$

o bien

$$\ell = \alpha \times r$$

cuando el ángulo está expresado en radianes.

Con esta definición, si tenemos un ángulo expresado en grados, para pasarlo a radianes debemos hacer,

$$\boxed{\alpha[^\circ] \Rightarrow \alpha[rad] = \alpha[^\circ] \times \frac{2\,\pi}{360^\circ}}$$

Por ejemplo,

$$30^\circ \Rightarrow \alpha[rad] = 30^\circ \times \frac{2\,\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

Lo que significa que 30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianes.

Si tenemos el ángulo en radianes y queremos convertirlo en grados, hacemos

Aplica lo aprendido.
Confecciona una tabla de conversión a radián para los siguientes ángulos: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 180°, 210°, 225°, 360°, $57^\circ\ 17'\ 44,81''$

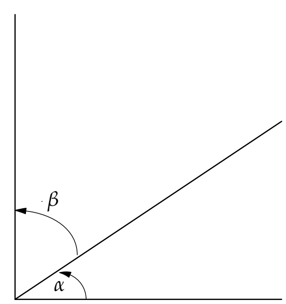
$$\boxed{\alpha[rad] \Rightarrow \alpha[^\circ] = \alpha[rad] \times \frac{360^\circ}{2\,\pi}}$$

Algunas definiciones complementarias

Ángulo Complementario: Dado un ángulo α, llamamos complemento (llamémoslo β) de α al ángulo que adicionado a α da como resultado un recto,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

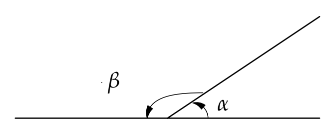
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



Ángulo Suplementario: Dado un ángulo α, llamamos suplemento (llamémoslo β) de α al ángulo, que adicionado a α, da como resultado un llano, es decir, π,

$$\alpha + \beta = \pi$$

$$\beta = \pi - \alpha$$



Ángulos en Sistemas de Coordenadas

Si bien la trigonometría tiene un origen anterior a los sistemas de coordenadas, vamos a introducir las relaciones trigonométricas a partir de una ubicación en un sistema de ejes cartesianos. De esta manera, las relaciones trigonométricas de ángulos superiores a 90° pueden tener sentido.

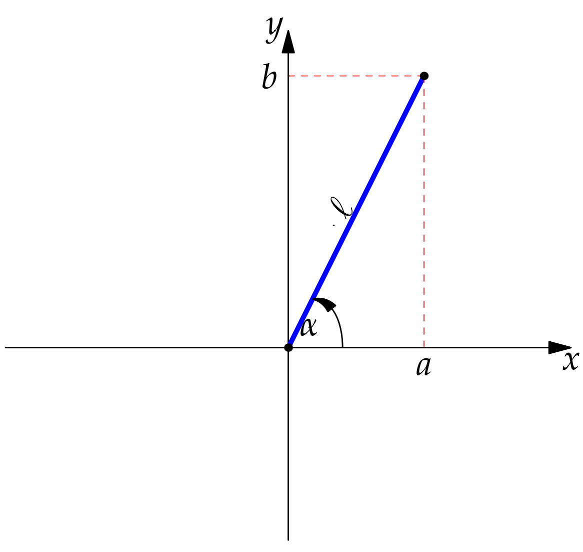
Tradicionalmente, las relaciones trigonométricas son obtenidas como proporciones de lados de triángulos rectángulos, por lo que resulta imposible condiderar triángulos que tengan un ángulo recto y otro superior a 90° ya que la imposición de que se forme un triángulo es que la suma de sus angulos debe ser 180°.

Ángulo en Posición Normal

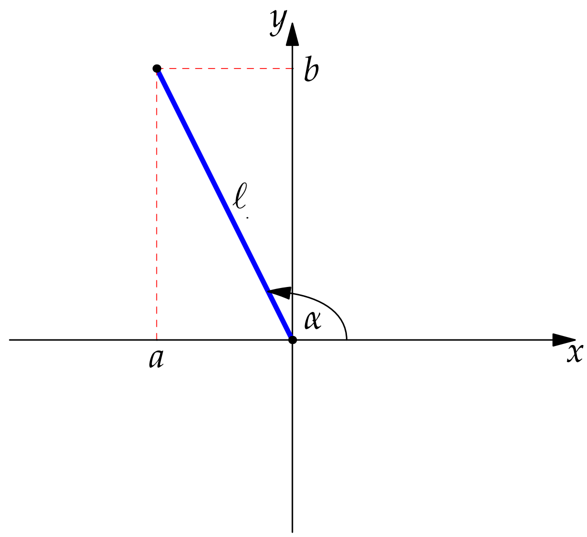
Vamos a decir que un ángulo está ubicado en *posición normal o estándar* si el vértice está en el origen de un sistema de coordenadas, su lado inicial sobre el eje positivo de las x y el ángulo se mide positivamente.

Si consideramos un punto (a, b) en el lado terminal del ángulo, la situación es

★ En general, los lados inciales y terminales no precisan ser de longitud finita, ya que los ángulos se definen como inclinación relativa entre semirectas. Es común mencionar que el lado terminal contiene al punto $P(a, b)$ y las coordenadas a y b servirán para cálculos posteriores.



En la figura se muestra un ángulo en posición normal, con lado terminal ℓ y ubicado en el primer cuadrante, esto es, $a > 0$ y $b > 0$.



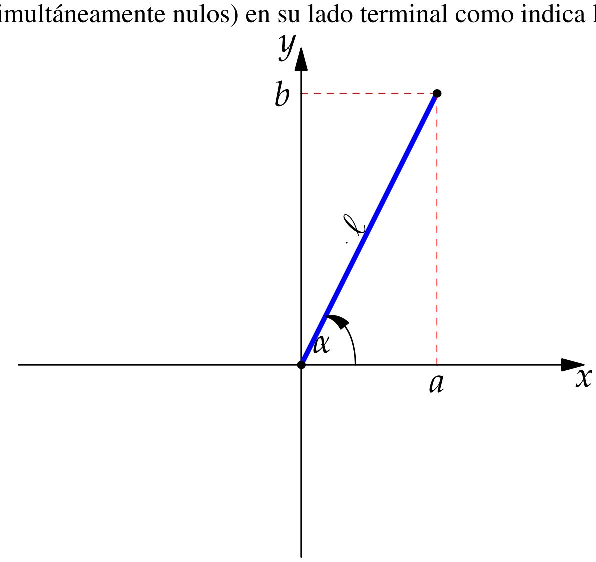
◊ **Infiere.**
A partir de los dos ejemplos presentados, infiere los signos de a y b que caracterizan a cada cuadrante.

En esta figura se muestra un ángulo en el segundo cuadrante, caracterizado por $a < 0$ y $b > 0$.

Notemos que dado un ángulo ubicado en posición normal, siempre define (en el cuadrante correspondiente) un triángulo rectángulo, ya que las coordenadas del punto contenido en el lado terminal están ubicados en estos ejes, que son perpendiculares.

Las Relaciones Trigonométricas

Dado un ángulo α ubicado en posición normal y un punto (a, b) (a y b no simultáneamente nulos) en su lado terminal como indica la figura,



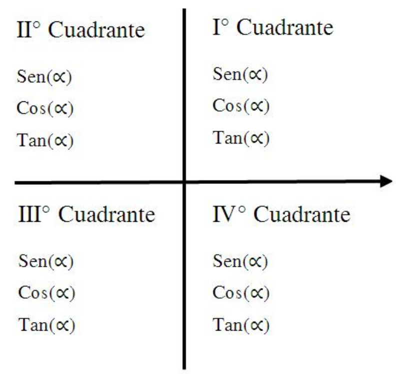
definimos las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente a través de las expresiones

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{b}{\ell} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\cos(\alpha) &= \frac{a}{\ell} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\tan(\alpha) &= \frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Estas definiciones son precisas en el sentido de que el signo de cada relación trigonométrica viene determinado por a y b según corresponda.

En las definiciones a partir de triángulos rectángulos, es imposible determinar signos, ya que las longitudes de los lados de los triángulos -esto es, el cateto opuesto, el adyacente y la hipotenusa- son siempre cantidades positivas.

♢ **Ejercicio**
Completar los signos de las relaciones trigonométricas de cada cuadrante en el que se ubica el ángulo.



Ejemplo. Sea α un ángulo ubicado en posición normal, del que se sabe que su lado terminal contiene al punto $P(1, \sqrt{3})$. Determinar el seno, el coseno y la tangente de α. Dejamos como ejercicio la confección del gráfico.

Calculemos primero la longitud del segmento que une al origen con el punto contenido en el lado terminal. Tenemos

$$\ell = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Luego, las relaciones trigonométricas son

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{b}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos(\alpha) &= \frac{a}{\ell} = \frac{1}{2} \\
\tan(\alpha) &= \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

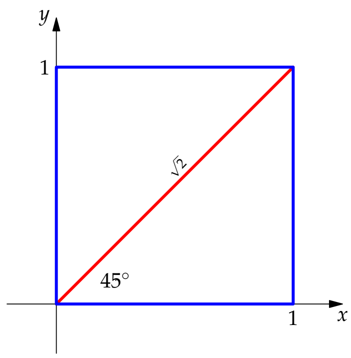
Relaciones trigonométricas de algunos ángulos especiales

A partir de las definiciones de las relaciones trigonométricas, calculemos algunas de ellas para algunos ángulos. Los valores de las relaciones trigonométricas los obtendremos a partir de ubicar convenientemente los ángulos en el sistema de coordenadas.

El ángulo de $0°$ o 0 rad

Si ubicamos un ángulo nulo en un sistema de coordenadas podemos tomar un lado terminal coincidente con el lado inicial. Si además tomamos que el lado tenga longitud 1, tendremos que

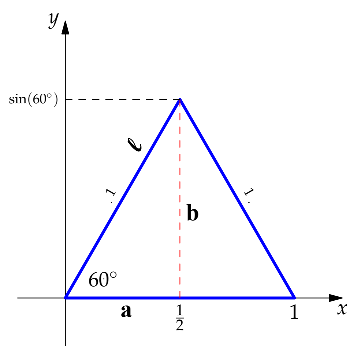
$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(0) &= \operatorname{sen}(0°) = 0 \\
\cos(0) &= \cos(0°) = 1 \\
\tan(0) &= \tan(0°) = 0
\end{aligned}
$$



El ángulo de $45°$ **o** $\frac{\pi}{4}$ **rad**

Si ubicamos un ángulo de 45° en un sistema de coordenadas podemos construir un cuadrado de lado 1, de manera tal de que el ángulo de 45 ° sea aquel de determine su diagonal. (ver gráfico)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) &= \operatorname{sen}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos(\frac{\pi}{4}) &= \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\tan(\frac{\pi}{4}) &= \tan(45°) = 1
\end{aligned}$$



El ángulo de $60°$ **o** $\frac{\pi}{3}$ **rad**

En un sistema de coordenadas construyamos un triángulo equilátero cuyos lados midan 1. Como un triángulo equilátero es equiángulo, es decir, sus ángulos son iguales, su valor es de 60° o $\frac{\pi}{3}$ rad.

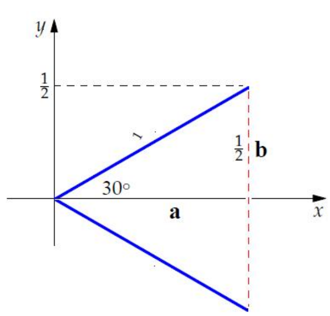
A partir de la figura, tenemos que $\cos(60°) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$
A partir del teorema de Pitágoras

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (b)^2$$

Resolviendo, obtenemos,

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}(60°) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(60°) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad \tan(\frac{\pi}{3}) = \tan(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1/2} = \sqrt{3}$$



El ángulo de $30°$ **o** $\frac{\pi}{6}$ **rad**

El mismo gráfico que utilizamos para calcular las relaciones trigonométricas para 60° nos permite calcular las correspondientes a 30°. Basta con considerar el ángulo que forma la recta vertical desde la mitad de la base con el vértice y notar que divide al ángulo de 60 a la mitad, es decir, define ángulos de 30° a ambos lados de la recta.
Las relaciones trigonométricas serán,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) &= \operatorname{sen}(30°) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\
\cos(\frac{\pi}{6}) &= \cos(30°) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan(\frac{\pi}{6}) &= \tan(30°) = \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Relaciones Trigonométricas Recíprocas

Las relaciones seno, coseno y tangente son las relaciones trigonométricas que podríamos definir como principales. A partir de ellas se definen las *relaciones trigonométricas recíprocas*

- *cosecante* (recíproca del seno, válida para $\operatorname{sen}(\alpha) \neq 0$), denotada $\operatorname{cosec}(\alpha)$ y definida por

$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

- *secante* (recíproca del coseno, válida para $\cos(\alpha) \neq 0$), denotada $\sec(\alpha)$ y definida por

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

- *cotangente* (recíproca de la tangente, válida para $\tan(\alpha) \neq 0$), denotada $\operatorname{cotg}(\alpha)$ y definida por

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

▲ **Observación**.
En el sentido multiplicativo, las relaciones trigonométricas recíprocas son los inversos. Sin embargo, cuando se estudian funciones trigonométricas -o funciones en general- el uso del término *inverso* tiene un sentido funcional, no algebraico.

▲ **Observación**.

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) \neq \operatorname{sen}(\alpha^2)$$

por ello el cuadrado del seno de α se denota

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

La Identidad Pitagórica Fundamental

A partir de las definiciones de las relaciones trigonométricas seno y coseno del ángulo α, siendo (a, b) un punto de su lado terminal y ℓ la distancia de ese punto al origen:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{b}{\ell} \\ \cos(\alpha) &= \frac{a}{\ell} \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} [\operatorname{sen}(\alpha)]^2 &= \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{b^2}{\ell^2} \\ [\cos(\alpha)]^2 &= \cos^2(\alpha) = \frac{a^2}{\ell^2} \end{aligned}$$

a partir de las cuales podemos escribir

$$\begin{aligned} b^2 &= \ell^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) \\ a^2 &= \ell^2 \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \ell^2 \cos^2(\alpha) + \ell^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) \\ &= \ell^2 \left[\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)\right] \end{aligned}$$

ahora, como $\ell^2 = a^2 + b^2$ obtenemos la *identidad pitagórica fundamental*

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1}$$

Este vínculo entre las relaciones seno y coseno de un ángulo es sin dudas la más importante desde varios puntos de vista. Algunas de las consecuencias que se ponen en evidencia son, a saber:

- Ninguna de las relaciones seno o coseno pueden ser menores que -1 ni mayores que 1. En efecto, si la suma de los cuadrados es la unidad, ambas relaciones deben mantenerse menores que 1 en valor absoluto.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1 \\ -1 &\leq \cos(\alpha) \leq 1 \end{aligned}$$

- Otra consecuencia es que a partir de saber el valor de una relación trigonométrica, puedo obtener la otra

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)} \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Para la determinación del signo a elegir es fundamental conocer el cuadrante en el que se halla el ángulo.

Ejemplo.

Consideremos un ángulo en posición normal del cual se sabe que se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$. Determinar el $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$

Solución.

Tenemos que a partir de la identidad pitagórica $\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1$ obtenemos

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}$$

ahora bien, como el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, tenemos que el signo debe ser elegido negativo, ya que es en el segundo y tercer cuadrante donde el coseno es negativo.

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

con lo que obtenemos

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25 - 16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

Para el cálculo de la tangente podemos observar que a partir de haber obtenido $a = \cos(\alpha)\sqrt{a^2 + b^2}$ y $b = \operatorname{sen}(\alpha)\sqrt{a^2 + b^2}$ y que además $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$ tenemos

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\sqrt{a^2 + b^2}}{\cos(\alpha)\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Entonces,

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Es decir que a partir de una relación trigonométrica y el dato de a qué cuadrante pertenece, podemos obtener todas las demás.

Identidades Trigonométricas

Partiendo de las definiciones y de la identidad fundamental podemos obtener identidades, es decir, ecuaciones equivalentes.

Consideremos la identidad Fundamental,

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1$$

dividiendo a ambos miembros por $\cos^2(\alpha)$, para $\cos^2(\alpha) \neq 0$, obtenemos.

$$\frac{\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

calculando, tenemos

$$\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

simplificando obtenemos la identidad

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \sec^2(\alpha)$$

Notemos que si a la identidad fundamental la dividimos a ambos miembros por $\text{sen}^2(\alpha)$ tenemos

$$\frac{\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} + \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} = \frac{1}{\text{sen}^2(\alpha)}$$

Con lo que llegamos a

$$\text{cotg}^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\text{sen}^2(\alpha)} = \text{cosec}^2(\alpha)$$

De esta manera se van construyendo un conjunto de igualdadades válidas para todos los valores de los ángulos, por lo que se denominan identidades.

Como ejemplo, comprobemos que

Como ejemplo, comprobemos que

$$[1+\cos(\alpha)][\mathrm{cosec}(\alpha)-\mathrm{cotg}(\alpha)] = \mathrm{sen}(\alpha)$$

▲ **Observación.** Para comprobar el cumplimiento de determinada identidad podemos partir del lado izquierdo de la igualdad y, mediante operaciones y propiedades, llegar a lo expresado en el miembro de la derecha. Podemos partir de la derecha y tratar de llegar a lo expresado en el miembro izquierdo. También, una manera *menos elegante* es trabajar algebraicamente y por separado con ambos miembros y llegar a una expresión común.

En efecto, reescribiendo $\mathrm{cosec}(\alpha)$ y $\mathrm{cotg}(\alpha)$ tenemos

$$[1+\cos(\alpha)][\mathrm{cosec}(\alpha)-\mathrm{cotg}(\alpha)] = [1+\cos(\alpha)]\left[\frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}-\frac{\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}\right]=$$

$$= [1+\cos(\alpha)]\left[\frac{1-\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}\right]=$$

multiplicando, obtenemos

$$=\frac{[1+\cos(\alpha)]\,.\,[1-\cos(\alpha)]}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \frac{1-\cos^2(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)} =$$

aplicando la identidad pitagórica, tenemos

$$= \frac{\mathrm{sen}^2(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \mathrm{sen}(\alpha)$$

Entonces, hemos probado que

$$[1+\cos(\alpha)][\mathrm{cosec}(\alpha)-\mathrm{cotg}(\alpha)] = \mathrm{sen}(\alpha)$$

La Circunferencia Trigonométrica

La identidad pitagórica fundamental,

$$\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1$$

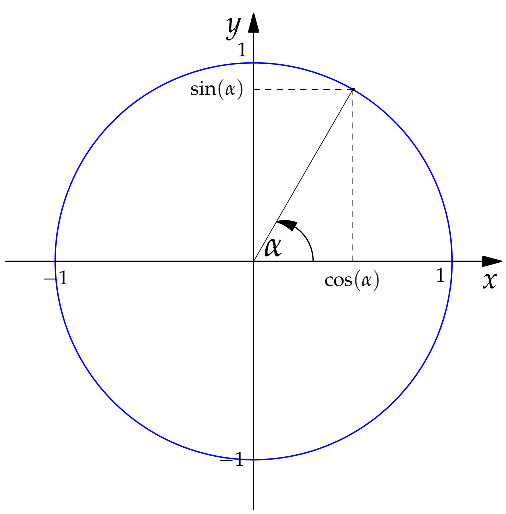
nos permite una visualización geométrica en un sistema de coordenadas con una geometría particular.

En efecto, si llamamos $x = \cos(\alpha)$ e $y = \operatorname{sen}(\alpha)$ la identidad se puede escribir como

$$x^2 + y^2 = 1$$

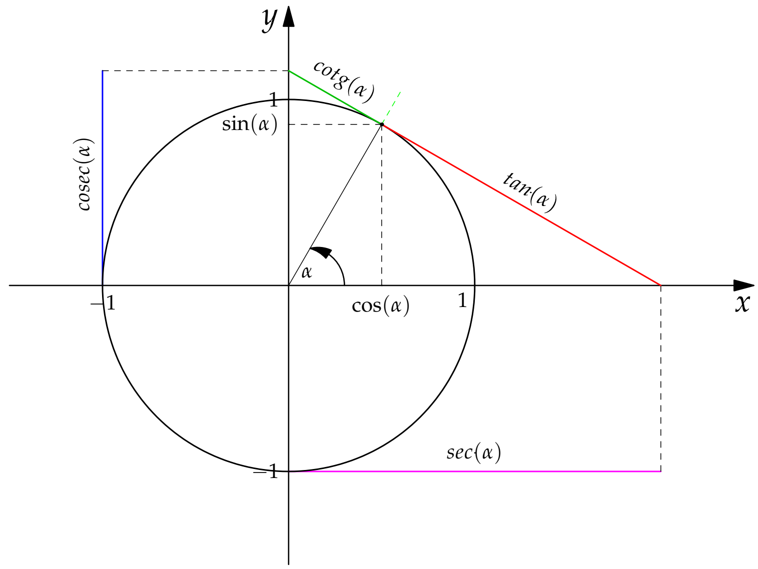
Como hemos visto, esta ecuación representa una circunferencia con centro en el origen y radio uno. Esta circunferencia se la denomina *circunferencia trigonométrica*.

Dada una circunferencia de radio 1, si medimos un ángulo α en sentido positivo (antihorario) lo que obtenemos es que la coordenada x del punto es el $\cos(\alpha)$ y la coordenada y es el $\operatorname{sen}(\alpha)$



En la circunferencia trigonométrica se puede aprovechar mejor si en ella visualizamos más relaciones trigonométricas que el seno y el coseno.

Un gráfico más completo de la circunferencia trigonométrica es la que contiene todas las relaciones.



◊ El gráfico completo es interesante desde el punto de vista de la visualización. Comprueba que las longitudes indicadas se corresponden con las relaciones trigonométricas recíprocas.

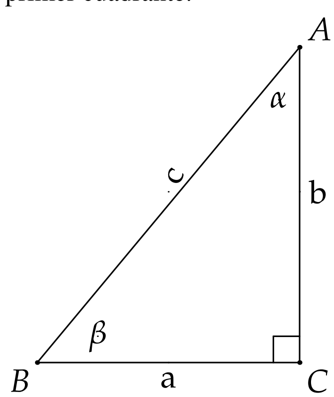
Triángulos Rectángulos

Resolución de triángulos

En términos generales, lo que entendemos por *resolución de triángulos* es la determinación de la medida de todos los lados y de todos los ángulos.

Las herramientas básicas para la resolución son, a saber

* El teorema de Pitágoras. En efecto, es este teorema el que vincula las longitudes de los lados, dos de los cuales son llamados *catetos* y el lado mayor -opuesto al ángulo recto- denominado *hipotenusa*.
* La utilización de las relaciones trigonométricas para ángulos en el primer cuadrante.



La relación entre los lados del triángulo de la figura viene dada a partir del Teorema de Pitágoras, que establece

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para cada ángulo, las relaciones trigonométricas son

Para el ángulo α

* $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$

* $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$

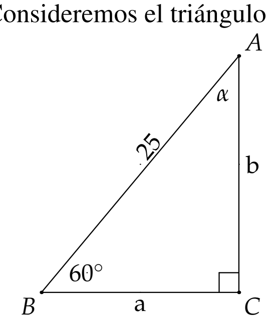
* $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

★ En un triángulo, es fundamental recordar que la suma interiores de sus ángulos forman 180°. es decir, $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$

Para el ángulo β

- $\operatorname{sen}(\beta) = \frac{b}{c}$
- $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$
- $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$

Ejemplo.
Consideremos el triángulo rectángulo que se indica en la figura:



Si queremos conocer todos los lados, podemos pensar de la siguiente manera:

Dado que

$$\cos(60^\circ) = \frac{a}{25}$$

tenemos que podemos obtener el lado desconocido a.

$$a = 25\cos(60^\circ) = 25\,\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

para conocer el lado b partimos de la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

obteniendo

$$b = \sqrt{25^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2}$$

lo que resulta

$$b = \frac{\sqrt{3 \cdot 25^2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, como $\alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, tenemos que $\alpha = 30^\circ$.

Con estas operaciones, tenemos todos los lados y todos los ángulos.

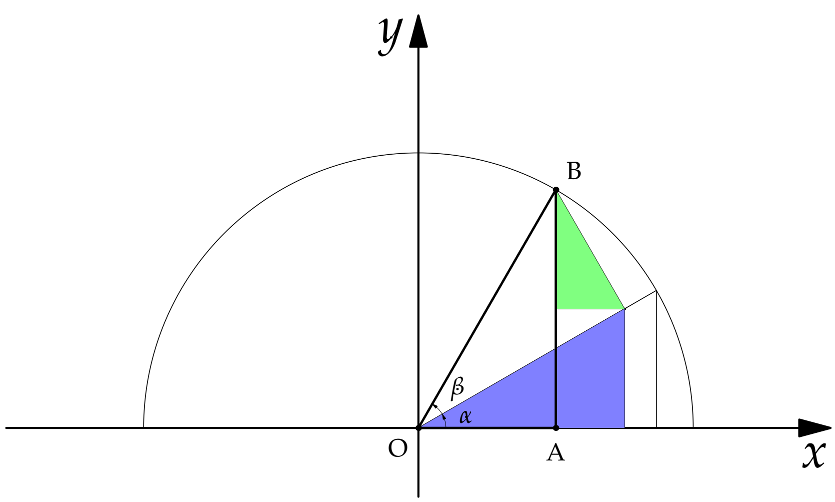
Relaciones trigonométricas de ángulos compuestos

En ocasiones precisamos calcular las relaciones trigonométricas de ángulos que son sumas o diferencias de ángulos de los cuales conocemos sus relaciones trigonométricas.

Como ejemplo, si queremos obtener el valor de $\cos(75^\circ)$ podemos notar que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$. Además, las relaciones trigonométricas de 30 y 45 grados son simples de calcular.

Esto significa que puede ser de gran ayuda (y lo será en diversas ramas de la matemática) tener expresiones para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ a partir de las propias para α y β por separado.

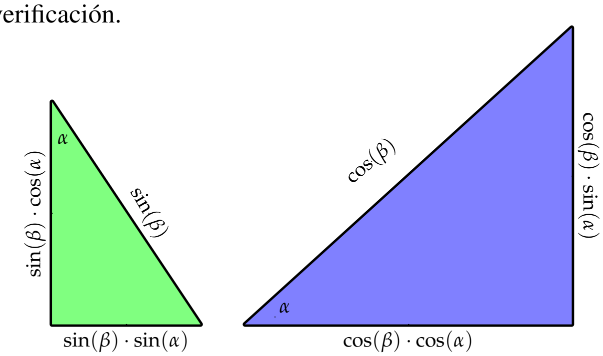
Consideremos la siguiente figura inscripta en la circunferencia trigonométrica (recordemos que tiene radio unidad).



Podemos ver que el triángulo OAB tiene por base $\cos(\alpha + \beta)$ y por altura, $\sin(\alpha + \beta)$. Otro aspecto que podemos notar es que la altura del triángulo OAB es la suma de las alturas de los triángulos señalados por verde y azul. Además, la base del triángulo OAB es la diferencia entre la base del triángulo azul y la base del triángulo verde.

Calculemos las dimensiones de los triángulos verde y azul y con sus bases y alturas calculamos la base y altura del triángulo OAB que, como mencionamos, son los valores de $\cos(\alpha+\beta)$ y $\sin(\alpha+\beta)$, respectivamente.

Analicemos los triángulos verde y azul. Las dimensiones de cada triángulo son mostradas en la siguiente figura y se deja como ejercicio la verificación.



Con lo cual, la suma de las alturas es

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

y la resta de las base azul con la base verde es

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

Con este resultado podemos concluir que para la suma de ángulos mostrados en la figura obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}$$

Si bien estas relaciones las hemos obtenido para un caso particular, el resultado es válido en general y se aplica aún para la resta de ángulos.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}}$$

Aplica lo aprendido.
Calcular $\cos(15^\circ)$ y $\operatorname{sen}(15^\circ)$
Pista:

$$\begin{aligned}\cos(15^\circ)&=\cos(45^\circ-30^\circ)\\ \operatorname{sen}(15^\circ)&=\operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ)\end{aligned}$$

y para la resta,

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}}$$

Notemos que podemos aplicar estas propiedades para obtener

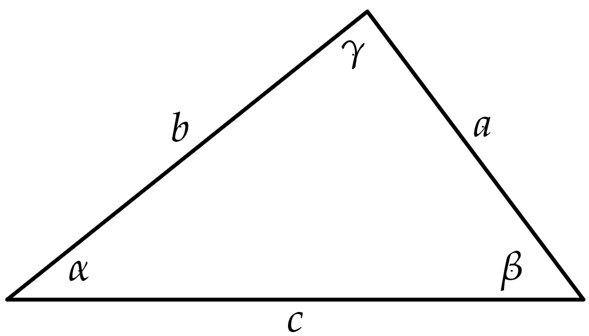
$$\begin{aligned}\cos(2\alpha)&=\cos(\alpha+\alpha)=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\\ \operatorname{sen}(2\alpha)&=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) &= \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen}(\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)\\
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) &= \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\cos(\alpha)-\cos(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen}(\alpha)=\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\pi-\alpha) &= \cos(\pi)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\alpha)=-\cos(\alpha)\\
\operatorname{sen}(\pi-\alpha) &= \operatorname{sen}(\pi)\cos(\alpha)-\cos(\pi)\operatorname{sen}(\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)
\end{aligned} \tag{1}$$

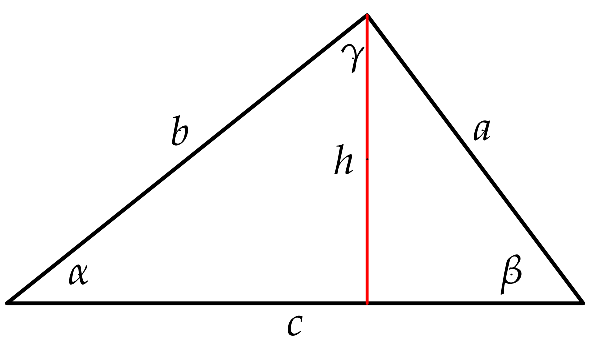
Teoremas del Seno y del Coseno

Consideremos ahora un triángulo cualesquiera, como muestra la figura.



Vamos a determinar relaciones entre los lados y los ángulos.

Notemos que si identificamos la altura del triángulo con h y la incorporamos al gráfico tenemos que el triángulo original es compuesto por dos triángulos rectángulos.



A partir de lo visto para triángulos rectángulos, podemos observar que h es calculable de varias maneras, a saber

$$\begin{aligned} h &= b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\ h &= a \cdot \operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

Lo que significa que igualando tenemos

$$b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = a \cdot \operatorname{sen}(\beta) \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

Si ahora rotamos el triángulo de manera tal que la base ahora sea a, por ejemplo, llegamos a una relación similar entre b, c y los $\operatorname{sen}(\beta)$ y $\operatorname{sen}(\gamma)$. Se deja como ejercicio probar esto.

Lo que se obtiene es una relación entre todos los lados del triángulo con sus ángulos opuestos. Este resultado se conoce como *Teorema del Seno*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

▲ **Observación.** Notemos que si alguno de los ángulos es recto, la aplicación del teorema del seno nos conduce a las definición del seno de un ángulo.

Ahora, analizando nuevamente el mismo triángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y relacionar h con a, b y c

Tenemos que

$$b^2 = h^2 + (c - a\cos(\beta))^2$$

Por otro lado, tenemos que

$$a^2 = h^2 + (a\cos(\beta))^2$$

Igualando las expresiones para h^2 tenemos

$$b^2 - (c - a\cos(\beta))^2 = a^2 - a^2\cos^2(\beta)$$

Desarrollando, obtenemos

$$b^2 - c^2 + 2ac\cos(\beta) - a^2\cos^2(\beta) = a^2 - a^2\cos^2(\beta)$$

simplificando y despejando b^2 obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos(\beta)$$

▲ **Observación.** Notemos que si el ángulo $\gamma = 90°$ la aplicación del teorema del coseno nos conduce al Teorema de Pitágoras, para la hipotenusa c.

De manera análoga podemos obtener los valores de a^2 y de b^2, hallando,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Este resultado es conocido como *Teorema del Coseno.*

Aplicando los teoremas del seno y del coseno podemos resolver cualquier tipo de triángulo, ya no necesariamente rectángulo.

Con estos teoremas, ya podemos resolver cualquier tipo de triángulo. En la resolución, es necesario plantear con precisión cuáles son los datos y cuáles las incógnitas, para luego relacionarlas a través de los teoremas.

Claramente, no hay una única manera de resolver triángulos. Eventualmente, un camino puede ser mejor que otro, en el sentido de llegar más rápido al resultado buscado.

Ejercicios de la parte IV

1. Dibuja un ángulo de $405°$.
2. Encuentra el ángulo complementario a $34°15'$.
3. Encuentra el ángulo suplementario de $104°\ 30'10''$.
4. Convierte un ángulo de $\frac{5}{12}\pi$ del sistema radial al sistema sexagesimal.
5. Convierte en ángulo de $\frac{7}{8}\pi$ radianes a grados.
6. Convierte un ángulo de $75°$ del sistema sexagesimal al sistema radial.
7. Encuentra la longitud del arco subtendido por un ángulo central de $30°$ en una circunferencia de radio 7.
8. Encuentra la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de radio 6.
9. Encuentra las medidas en grados y en radianes del ángulo obtuso formado por las agujas de un reloj:
   i) A las 7:00
   ii) A las 2:30
10. Un péndulo de 80 cm. se balancea de un lado a otro. E su movimiento la punta del péndulo recorre un arco de 40 cm. de longitud en cada balanceo ¿Cuál es el número de grados que recorre el péndulo en un balanceo?
11. Si α es un ángulo agudo y el $sen(\alpha) = \frac{2}{7}$, encuentra los valores de las demás relaciones trigonométricas de α.
12. Si $\cos(x) = \frac{1}{7}$ y x pertenece al IVº cuadrante, calcula $sen(x)$.
13. Si $sen(x) = \frac{1}{3}$ y $\cos(x) < 0$, calcula el valor exacto de $\cos(x)$ y de $\tan(x)$.
14. Encuentra los valores de t tal que $0° \leq t \leq 360°$ y
$$4\,cos^2(t) = 3 - 4cos(t)$$
15. Sea β un ángulo del cuarto cuadrante tal que $cotg(\beta) = -5$. Calcula las restantes relaciones trigonométricas.
16. Encuentra el ángulo $\theta \,\epsilon\, [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ que satisfaga
$$2\,sen^2(\theta) - 5\,sen(\theta) = 3$$
17. Determine las relaciones seno, coseno y tangente del ángulo del cuarto cuadrante que satisface la ecuación
$$5\,cos^2(\theta) + \cos(\theta) = sen^2(\theta)$$
18. Determine los valores de θ en el intervalo $[0, \pi]$ tales que
$$-\,cos(\theta)\,[tan(\theta) + cotan(\theta)] = -\sqrt{2}$$

19. Comprueba las siguientes igualdades utilizando las fórmulas de seno y coseno de la suma o resta de ángulos:

i) $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen(\alpha)$

iii) $sen(\pi+\alpha)=-sen(\alpha)$

iv) $sen(\pi-\alpha)=sen(\alpha)$

v) $cos(\pi+\alpha)=-cos(\alpha)$

vi) $cos(\pi-\alpha)=-cos(\alpha)$

vii) $sen(-\alpha)=-sen(\alpha)$ (Se dice que el seno es una función impar)

viii) $cos(-\alpha)=cos(\alpha)$ (Se dice que el coseno es una función par).

20. Indica la opción correcta y justifica tu elección:

El $sen(1320°)$ es igual a:

a) $sen(60°)$ y $cos(30°)$

b) $-sen(30°)$ y $-cos(30°)$

c) $sen(30°)$ y $cos(60°)$

d) $-sen(60°)$ y $-cos(30°)$

e) $-sen(30°)$ y $-cos(60°)$

21. Escribe los ángulos como suma o resta de ángulos conocidos y calcula de forma exacta aplicando las fórmulas correspondientes:

a) $sen(15°)=sen(60°-45°)$ (por ejemplo)

b) $\cos(75°)$

c) $sen(165°)$

d) $\tan(300°)$

22. Verifica las siguientes identidades:

a) $\left(1-sen^2(\alpha)\right).\left(1+cotg^2(\alpha)\right)+1=cosec^2(\alpha)$

b) $\cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$

c) $sen(2\alpha)=2.sen(\alpha).\cos(\alpha)$

d) $\tan(\alpha)+cotg(\alpha)=\sec(\alpha).cosec(\alpha)$

23. Calcular de forma exacta (sin usar calculadora) $\cos(105°)$

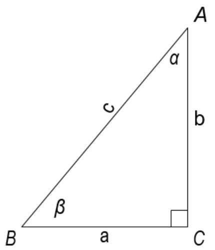
24. Dado el triángulo rectángulo de la figura, obtiene el valor de todos los lados y todos los ángulos.

a) $\alpha=30°, b=1$

b) $\beta=30°, c=1$

c) $\alpha=45°, a=1$

d) $\beta=45°, c=\sqrt{2}$



25. Determina el coseno de cada ángulo y los lados del triángulo de vértices $(1,-1)$, $(0,1)$ y $(2,3)$.

26. Halla, explicitando todos los cálculos, el valor exacto de la siguientes expresiones:

    a) $[tan^2(30°)+\ cos^2(60°)-sec^2(30°)].3sen(150°)+cos^2(105°)$

    b) $2.sen(105°)+\cos(2220°)-\tan(315°)$

    c) $\tan(1215°)+sen^2(300°)$

27. Sea θ el ángulo del segundo cuadrante tal que $sen(\theta)=\frac{3}{5}$ y sea φ el ángulo que, ubicado en posición normal, tiene su lado terminal pasando por el punto $P=(-\sqrt{5},-1)$.

    a) Determina el valor de las restantes relaciones trigonométricas del ángulo θ.

    b) Halla el valor exacto de $sen(\theta+\varphi)$.

28. Un helicóptero se mantiene a una altitud constante de 340 metros y pasa por encima de un punto de observación A ubicado en el suelo. Después de un minuto, el ángulo de elevación de A al helicóptero es de 60°. Grafica la situación y determina la velocidad del helicóptero en km. por hora.

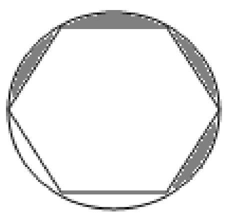
29. Un faro de 30 m. de altura se encuentra ubicado sobre un acantilado. Si desde un barco, en un instante dado, se observa el extremo y la base del faro con ángulos de elevación de $45°$ y de $30°$ respectivamente, determina a que distancia se encuentra el barco de la perpendicular que contiene al eje del faro. Grafica la situación y justifica. (Aproxima el número $\sqrt{3}$ con el valor 1,7).

30. Un avión vuela entre las ciudades A y B que distan entre sí 80 km. En determinado instante las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de depresión de $30°$ y $45°$ respectivamente. ¿A que altura está el avión en ese instante?

31. Una persona caminó primero 4 km en dirección sur y luego 2 km. en dirección sudoeste. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

32. Determina el valor del lado de un hexágono regular inscripto en un círculo de radio 1.

33. Determina el valor del área y el perímetro de la región sombreada, sabiendo que el círculo tiene radio unidad.

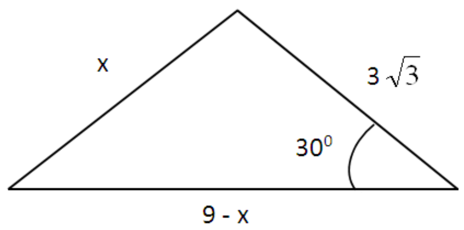


34. Encuentre el perímetro y el área de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia cuyo radio mide 2cm.

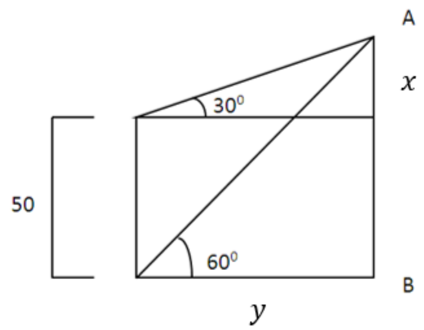
35. Desde un punto del suelo situado a 5 m. de la base de un pedestal se ve la parte superior de este con un ángulo de elevación de $45°$, mientras que la parte superior de la estatua que se apoya sobre el pedestal se ve con un ángulo de elevación de $60°$. Hallar la altura del pedestal y de la estatua.

36. Una antena de radio está sujeta al suelo por un cable a cada lado, que forman con la antena ángulos de $45°$y $60°$. Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena. La distancia entre los puntos de sujeción de los cables es de 120 m. Calcula la altura de la antena y la distancia de la misma a cada punto de sujeción.

37. Utilizando los datos de la figura determina la medida de los restantes lados y el área del triángulo.



38. Determina la medida del segmento AB.



Bibliografía

* Antonyan, N.; Cendejas Morales, L. *Fundamentos de Álgebra*. Ed. Thomson, 2006.
* Demana, F.; Waits, B.; Foley, G.; Kennedy, D.; Blitzer, R. *Matemáticas Universitarias Introductorias*. Ed. Pearson, 2009.
* Novelli, A. *Elementos de Matemática*. Ed. del autor, 2005.
* Stewart, J.; Redlin, L.; Watson, S. *Precálculo*. Ed. Cengage Learning, 5 edición, 2007.
* Zill, D.; Dewar, J. *Precálculo con Avances de Cálculo*. Ed. Mc Graw Hill, 4 edición, 2007
* Dewar, Z., & Zill, D. G. (1999). Algebra y trigonometría. Editorial Mc Gran Hill Sto. Dgo. 2 edición año