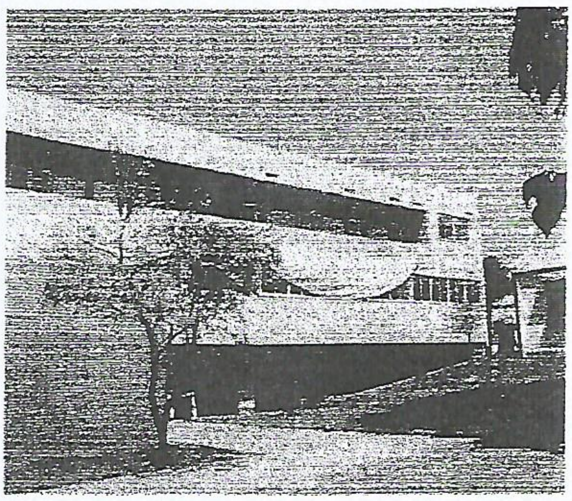
Universidad Nacional de Jujuy

Facultad de Ingeniería



Sistema de Ingreso

Curso de Nivelación 2018

Cartilla de Trabajos Prácticos

San Salvador de Jujuy, diciembre de 2017

Curso de Nivelación Facultad de Ingeniería 2018

Duración: 4 semanas
Inicio: Miércoles 14 de febrero de 2018

Asistencia: El alumno deberá cumplir con el 70% de la **asistencia** al curso para ingresar, es decir,

no podrá tener más de 5 (cinco) inasistencias.

Evaluación del curso de Nivelación

Fechas importantes: Deben presentarse a rendir con DNI

Primera fecha de Evaluación del Curso de Nivelación:

sábado 10 de marzo de 2018- 8:30 hs

Segunda Fecha de Evaluación del Curso de Nivelación:

viernes 16 de marzo de 2018- 8:30 hs

El alumno que apruebe la evaluación del curso de nivelación pasará a cursar las asignaturas de la carrera. El alumno que no aprobó esta evaluación pero ha cumplido con la asistencia al curso, pasará a cursar el **Trayecto de Formación Complementaria**.

Contenidos a desarrollarse en el Curso de Nivelación

MATEMÁTICA

1. 1.1. Conjuntos numéricos. Conjunto de números Reales
   1.2. Propiedades de potencias y raíces
   1.3. Intervalos abiertos y cerrados. Intersección y unión de intervalos
   1.4. Desigualdades. Ecuación de primer grado con una variable
   1.5. Notación científica. Uso de la calculadora

2. 2.1. Función. Dominio. Codominio. Imagen.
   2.2. Valor de una función . Interpretación geométrica del gráfico de una función
   2.3. Función lineal. Ecuación de una recta
   2.4. Gráfico de una recta. Pendiente. Rectas paralelas y perpendiculares.
   2.5. Función cuadrática. Elementos principales. Cálculo de raíces

3. 3.1. Polinomios. Operaciones con polinomios
   3.2. Teorema del Resto . Regla de Ruffini
   3.3 Casos de factoreo
   3.4. Expresiones algebraicas racionales

4. 4.1. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas
   4.2. Clasificación de sistemas según la solución
   4.3. Métodos de resolución
   4.4. Resolución de problemas de aplicación

5. 5.1. Ángulos. Sistemas de medición
   5.2. Relaciones y Funciones trigonométricas
   5.3. Signo de las funciones trigonométricas en los cuadrantes
   5.4. Resolución del triángulo rectángulo
   5.5. Resolución de ecuaciones trigonométricas
   5.6. Identidades trigonométricas
   5.7 Vectores

TRABAJO PRACTICO 1 – Números Reales- Ecuaciones

1.- Indique verdadero (V) o falso (F) lo que se afirma

a) Todo número entero es un número racional

b) Todo número racional es un número natural

c) Todo cociente de números enteros es un número racional

d) Los números racionales tienen infinitas cifras decimales periódicas

e) Los números irracionales no se pueden escribir como el cociente de dos números enteros

2.-Escribe 3 números racionales y 3 números irracionales comprendidos entre 3 y 4. ¿son los únicos posibles?

3.- Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales o irracionales:

4 $\quad -14/7 \quad 3/2 \quad \sqrt{15} \quad -4/7 \quad -6 \quad 1{,}02002002\ldots \quad \pi/3$

4.- ¿Cuál es el orden, de menor a mayor, de los números $M=\sqrt{3}/2$, $P=9/4\sqrt{3}$ y $S=1$?

A) M, S, P B) M, P, S C) S, M, P D) S, P, M E) P, S, M

5.- Si a es un número de dos dígitos, en que el dígito de las decenas es m y la de las unidades es n, entonces $a+1=\boxed{}$

A) m+n+1 B) 10m+n+1 C) 100 m + n+1 D) 100 m +10 n +1 E) 10(m+1)+n

6.- Escribe en forma de potencia de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[6]{x^4}\,.\,\sqrt[3]{x^2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}}$ c) $\sqrt[5]{2^3} : \sqrt{2}$ d) $\dfrac{\sqrt[5]{z^4}}{\sqrt{z}}$

7.- Si simplifico la siguiente expresión $\sqrt[5]{a^2}\,.\,\sqrt{9a^3}\,.\,a^{-1/2}$ da como resultado

$$\sqrt[5]{a^2}\,.\,\sqrt{9a^3}\,.\,a^{-1/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8.- Si simplifico la siguiente expresión da como resultado

A) $b^{-1/2}\,.\,\sqrt[3]{b^7}\,.\,\sqrt{25b^5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ B) $\sqrt{4m^3}\,.\,m^{-1/2}\,.\,\sqrt[3]{m^5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9.- Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{1/2} . 7^{3/2} . \left(\frac{1}{7}\right)^{-1/3} : 7^{1/2}\right]^{-2/3} =$ b) $\left(8^{1/2}\right)^{3/2} . \left(\sqrt{8^5}\right)^{-2} =$

10. $\dfrac{\sqrt{5^5+5^5+5^5+5^5+5^5}}{\sqrt[3]{5^5+5^5+5^5+5^5+5^5}} = \boxed{}$

A) $5^{5/6}$ B) 1 C) 5 D) $5^{2/3}$ E) $5^{3/2}$

11.- Indique si es verdadero o falso las igualdades siguientes y justifique

a) $\sqrt{9.5} = \sqrt{9}.\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10+16} = \sqrt{10} + \sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{34:15} = \sqrt[3]{34} : \sqrt[3]{15}$

12.- Resuelva mentalmente las siguientes ecuaciones

a) $3x = 15$ b) $-4x = 24$ c) $x - 5 = 0$ d) $(x-3).(x-8) = 0$

13.- Resuelva y verifique el resultado que obtenga:

a) $x - 15 = 20$ b) $x - 4 = x - 4$ c) $5x + 3 = 2x + 18$ d) $3(x+2) = 15$

e) $3x = -5(x-2)$ f) $(x-5).(x+5) = x(x-2)$

14.- La ecuación que tiene al número cero como por solución es: $\boxed{}$

a) $x(2+3b)+5=1$ b) $3(x+8)=3$ c) $2-x = x-2$ d) $x(x-7)=0$

15.- Hallar el número que cumple:
a) Su doble más 5 es 35.
b) Al sumarle su anterior obtenemos 51.
c) Al sumar su doble, su mitad y 15 se obtine 99.
d) Su cuarta parte es 15.

16.- a) Marta tiene 15 años, que es la tercera parte de la edad de su madre. ¿Qué edad tiene la madre de Marta?
b) ¿Cuánto mide una cuerda si su tercera cuarta parte mide 200 metros?
c) Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 219.
d) La suma de un número, su mitad, su doble y su triple es 55. ¿Qué número es?

17.- Dos pescadores tienen 5 y 4 truchas respectivamente. Se encuentran con un cazador cansado y de hambre, con quien comparten las truchas en partes iguales. El cazador al despedirse, como agradecimiento, les obsequia $ 42, ¿cuánto le corresponde a cada pescador? $\boxed{}$

A) 30 y 12 B) 26 y 16 C) 28 y 14 D) 21 y 21 E) 70/3 y 56/3

18.- Una nutricionista mezcla tres tipos de jugos de fruta de modo que sus volúmenes están en la razón 1 : 2 : 3. Si el volumen del segundo tipo es de 4 litros, ¿cuántos litros tiene la mezcla total?

A) 6 litros B) 10 litros C) 12 litros D) 14 litros E) 16 litros $\boxed{}$

19.- En una casa de dos pisos se necesita alfombrar 60 m2 en el primer piso y 40 m2 en el segundo. Si la alfombra que se debe usar en el segundo piso cuesta $ p el metro cuadrado y la otra es un 60% más cara, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el costo total C en alfombras? $\boxed{}$

A) $C = 1{,}6\,p.100 + p\,100$ B) $C = 0{,}6\,p\,100 + p\,100$ C) $C = 0{,}6\,p\,60 + p\,40$

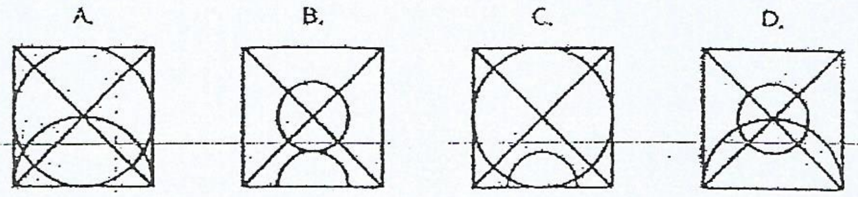
D) $C = p.60 + 0{,}6\,p\,40$ E) $C = 1{,}6\,p\,60 + p.40$

20.- Un alambre de 920 cm se divide en tres partes, de modo que dos de ellas son iguales y la otra es 80 cm más larga que las otras. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite encontrar la longitud de la parte más corta?

A) $920 : 3 = 2x + 80$ C) $920 : 3 = 2x - 80$ E) Ninguna de las anteriores

B) $920 - 80 = 2x$ D) $920 = 3x + 80$

21.- En un cuadrado de lado L se trazan las diagonales. Haciendo centro en el punto de corte de las diagonales se traza la circunferencia de radio L/2 y haciendo centro en el punto medio de uno de los lados del cuadrado se traza una circunferencia de diámetro L. La figura que resulta es ....



22.- En un curso cada estudiante puede optar solamente por una actividad extraprogramática: las tres cuartas partes de los estudiantes elige deportes y una sexta parte del curso elige teatro. ¿Cuál de las siguientes es la mejor estimación del porcentaje de estudiantes que participa en alguna de estas dos actividades ?

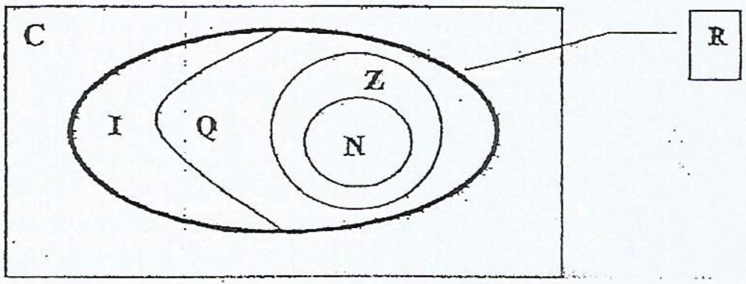
A) Menos del 91%. B)Entre el 91% y el 93%. C) Entre el 93% y el 95%.
D) Entre el 95% y el 97%. E) Más del 97%.

23.-Calcula el número de baldosas cuadradas que hay en un salon rectangular de 6 m de largo y 4,5 m de ancho, si cada baldosa mide 30 cm de lado.

El conjunto Universal de números es el conjunto de los números complejos **C**. Incluido en este conjunto están los números reales **R** , números racionales **Q** , números irracionales **I** , números enteros **Z** y números naturales **N**. El siguiente diagrama de Venn muestra la relación de inclusión en estos conjuntos

Como vemos , el conjunto de los números Reales es la unión de los números racionales con los números irracionales :

$$R = Q \cup I$$



Estos números reales se pueden representar en la recta numérica llamada recta real. Cada punto de esa recta representa un número real. Algunas propiedades del conjunto de los números reales R son :

1. tiene infinitos elementos (se dice es infinito ∞)
2. No tiene primero ni último elemento
3. Entre dos números reales existe siempre un número infinito de números reales , por ello se dice que el conjunto de los números reales R es denso
4. El conjunto R es totalmente ordenado por la relación menor o igual

TRABAJO PRACTICO 2 – Intervalos–Desigualdades - Notación científica

1.- Dados los intervalos $A = [-3\ ,\ 5)$ $B = (2\ ,\ 9]$ encuentra

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \cap \mathbb{N}$ d) $\mathbb{R} - A$ e) $\mathbb{R} - B$

2.- Encuentra el intervalo resultante de las siguientes operaciones y represéntelo en la recta real:

$(-2\ ,7] \cap (-3,5)$ $(-\infty\ ,4] \cap (-\infty\ ,9)$ $(-\infty\ ,4] \cup (-\infty\ ,9)$ $(-\infty\ ,4] \cup (3\ ,\infty)$

$(8\ ;15) \cap (-1\ ,20]$ $(-2\ ,3] \cap (7\ ,9)$ $(-2\ ,3] \cup (7\ ,9]$

3.- Considere los siguientes intervalos: $A = [-3,3]$ $B = (-3\ ,3)$ $C = [-1\ ,4]$ $D = [-4\ ,5]$
Representar sobre la recta real y escribir con notación de intervalo el resultado de las siguientes operaciones :

a) $A \cup D$ b) $A \cap C$ c) $B - C$ d) $A \cup (B \cap C)$

4.- Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese la solución como intervalo:

a) $x + 2 \leq 32$ b) $x - 11 > -9$ c) $68 - 20x < 0$

5.- Exprese como inecuación:

a) a lo sumo puedo gastar $250
b) un artesano debe producir por semana no menos de 12 artículos y a lo sumo 50
c) se pueden sembrar hasta 3 ha por día
d) un granjero debe criar como mínimo 100 gallinas para tener ganancias

6.- Los elementos del conjunto $A = \{-1\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ 0,\ \frac{1}{2}\ ,2\ \}$ que verifican la desigualdad $x - 2 < 0$ son...

7.- Vicente no puede gastar más de $400 en la compra de un pantalón y una camisa. No sabe el precio de cada cosa, pero sí que una camisa vale dos quintas partes de lo que vale un pantalón. ¿Hasta cuánto puede costar el pantalón?

8.- ¿Cuantas has tiene un campo de 250000 m^2 ?

9.- Indica si cada una de estas afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).

a) para envasar 1 hl se necesitan 100 botellas de 1 lt
b) ½ m^2 es el área de un cuadrado con lado de ½ m
c) 20 ml equivalen a 200 cm^3
d) una botella de 1,5 lt contiene exactamente 150 cm^3

10.- Introduce en la calculadora las siguientes operaciones y observa la notación que aparece:

a) 26,004 : 2.400.200= b) 205.000 · 120.000=
c) 0,000009 : 27.000.000= d) 241,56 · 3.600.000=
e) 2,8 : 18.800=
¿Qué ventajas ofrece esta notación?

11.- El número 237.450.000 escrito en notación científica es 237.450.000 = ...

12. a) Calcula el número aproximado de glóbulos rojos que tiene una persona, sabiendo que tiene unos 4 500 000 por milímetro cúbico y que su cantidad de sangre es de 5 litros.
b) ¿Qué longitud ocuparían estos glóbulos rojos puestos en fila si su diámetro es de 0,008 milímetros? Exprésalo en kilómetros.

13.- El Sol se encuentra aproximadamente a 93 millones de millas de la Tierra. ¿Cuánto tarda la luz, que viaja aproximadamente a 300.000 kilómetros por segundo, en llegar a nosotros desde el Sol?

14.- Si $m = 5.10^{-2}$, el valor de la expresión $\dfrac{5^2.m^{-3} - 5m^{-2}}{2.10^3}$ es: (marcar la opción verdadera)

a) 173 b) 0,2 c) 5 d) 99 e) ninguna de las anteriores

15.-Una vacuna tiene 100 000 000 bacterias por centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de 120 ampollas de 80 milímetros cúbicos cada una?

16.- Si $p = \frac{0{,}02}{0{,}04}$ $q = \frac{0{,}2}{0{,}0004}$ $r = \frac{2}{0{,}00002}$ Entonces ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

$\boxed{}$ a) $p > q$ b) $q < r$ c) $-p^4 + p > q$

TRABAJO PRACTICO 3 : Funciones

Una **función** definida desde un conjunto A hacia un conjunto B es una **regla** que a cada elemento (x) de A le hace corresponder uno y solo un elemento (llamado f(x)) de B

Forma de indicar una función :

$$F : A \rightarrow B \; / \; y = f(x)$$

Dominio de una función es el conjunto formado por todos los números reales para los que f(x) está definida, exista o tenga sentido. Es el conjunto A

Codominio es el conjunto de llegada, es el conjunto B

El número f(x) , que se lee " f de x ", es el **valor de la función** f correspondiente al valor asignado a x. Se llama **imagen o rango** de la función f al conjunto de todos los valores de f(x). Este conjunto está siempre contenido – o puede ser igual – al conjunto B

Una función puede venir dada por : su fórmula, o su gráfico, una tabla de valores, o bien por un enunciado.

La gráfica de una función se realiza en un sistema de ejes coordenados (X e Y) perpendiculares entre sí. El eje de las X se llama eje de las abscisas y el eje de las Y se llama eje de las ordenadas

- Una función asigna un único valor de la variable *y* a cada valor de la variable *x*.
- *x* es una variable independiente.
- *y*, que es función de *x*, es una variable dependiente.
- Se escribe *y=f(x)*. Se lee e igual a f de x.
- La variable independiente se representa en el eje de las abscisas.
- El valor de la función es el valor de y , se representa en el eje de las ordenadas.

1) Se tiene la función $f : A \to B$ de modo que $f = \{(a,5);\ (b,6);\ (c,5)\}$ indicar cuales de siguientes afirmaciones con correctas:

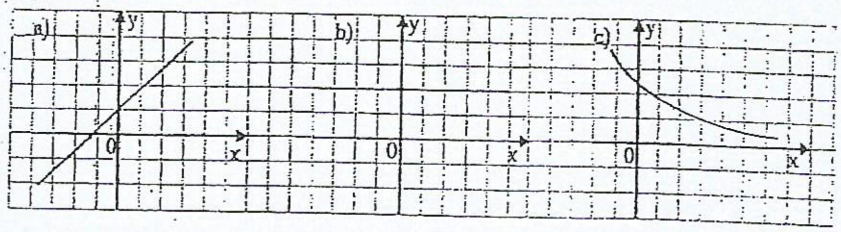
a) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{5, 6, 7\}$

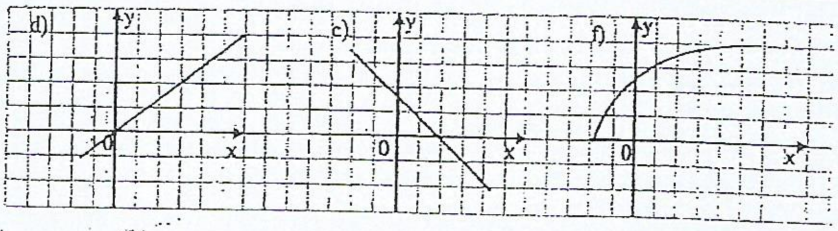
b) $Dom(f) = \{a; b; c\}$

c) $f(a) = f(c)$

d) $f(a) - f(b) = 1$

2) Indica, en cada gráfico, cuál corresponde a una función creciente, a una función decreciente o a una función constante





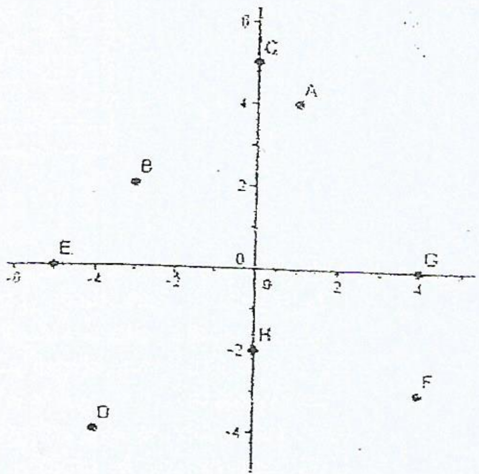
3.- ¿Cuáles de los siguientes pares no pertenecen a la función $y = x^2 - 4$

a) (2,0) b) (−2,0) c) (−1,−3) d) (−3,−5) e) (0,4)

4.- Si $f(x) = 3x + 2$ entonces $f(a+b) - f(a-b) = \boxed{}$

a) 0 b) 4 c) $6b$ d) $6b + 4$ e) ninguna de las opciones anteriores

5.- Escriba las coordenadas de los puntos marcados en el grafico



6.- Represente 3 puntos que tengan:

a) igual ordenada

b) igual abscisa

c) la abscisa igual a la ordenada

d) abscisa positiva y ordenada nula

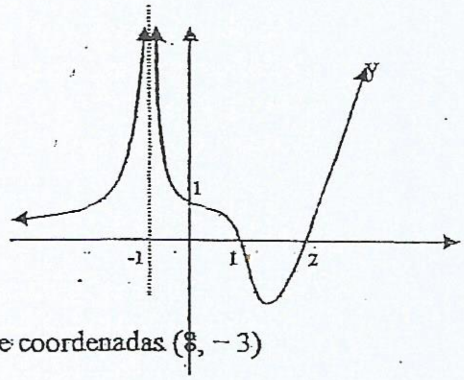
e) abscisa nula y ordenada negativa

7.- Dada la función real $f : R \to R$ definida por

Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x > 1 \\ x - 4 & x \le 1 \end{cases}$$

a) $f(2) = 9$ b) $f(0) = 1$ c) $f(-1) = -5$



8.- Dado el gráfico de f :

a) ¿para que valores de x la función es positiva?

b) Determine los valores donde se anula la función

c) Determine los intervalos donde es creciente.

d) Indique su dominio e imagen

e) Complete :

(0 ,   ) (, 0) (, –2) (–4 ,   )

9.- ¿Cuál de los siguientes puntos es simétrico al punto de coordenadas (8, – 3) con respecto al eje de las ordenadas ?

A) (–8, –3)   B) (8, 3)   C) (–8, 3)   D) (–3, 8)   E (3, 8)

10.- Queremos alquilar un automóvil y para eso visitamos dos empresas. En una de ellas el costo es de \$65 por día. La otra, en cambio, no cobra por día, sino \$3,25 por kilómetro recorrido. En ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente.

a) ¿De qué variable es función el costo en cada caso?

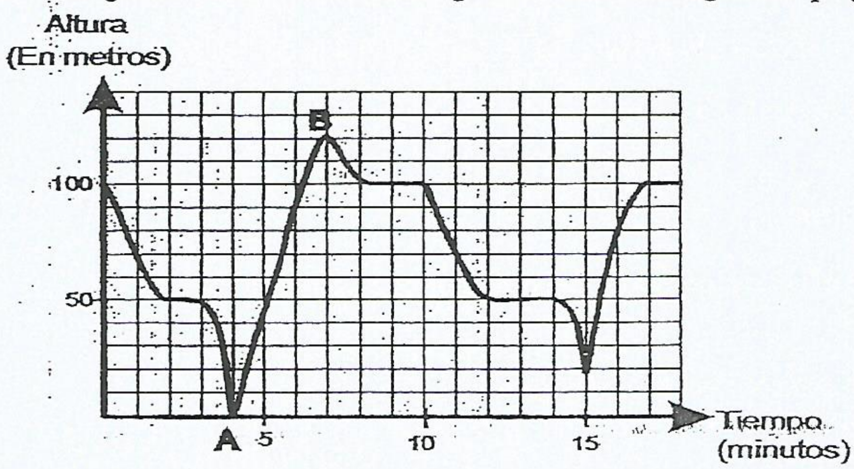
b) Realiza un gráfico costo – tiempo en días para cada situación.

c) Si necesitamos un auto por 3 días para recorrer 20 km por día ¿qué empresa nos conviene más?

d) ¿Cuál será la empresa que nos conviene para recorrer 60 km en un solo día?

e) ¿Cuál conviene si alquilamos el automóvil por 2 días para recorrer 13 km por día?

11- En base a esta gráfica sobre el vuelo de un águila contesta a las siguientes preguntas:



a) ¿Qué variables se relacionan en esta función?

b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) ¿A qué altura está el nido del águila?

d) Durante su vuelo el águila ha cazado, o intentado cazar, una paloma y un conejo. ¿En qué instante caza el conejo? ¿Y la paloma? ¿A qué altura volaba la paloma?

e) En el tiempo que refleja la gráfica, ¿ha vuelto el águila a su nido en algún momento? ¿Cuándo? ¿Cuánto tiempo ha estado?

f) ¿Cuál es la altura desde la que el águila otea a sus posibles presas?

12.- La siguiente gráfica muestra las temperaturas en °C de una población en las 24 hs de un día de invierno.

¿Qué variables relaciona esta función?

a. ¿Cuál es el dominio de la función?

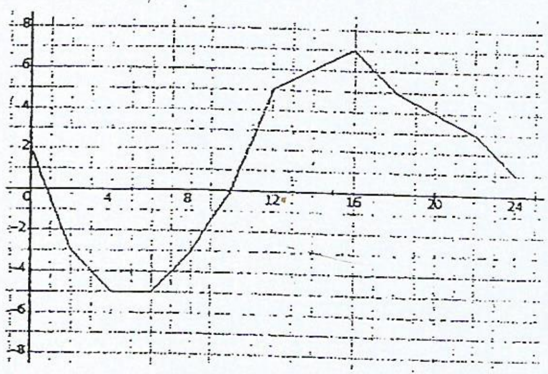
b. ¿Cuándo ha subido la temperatura?

c. ¿Cuándo ha descendido?

d. Ha habido algún tiempo en que la temperatura no haya experimentado cambios? ¿ Cuándo?

e. ¿En qué momento se alcanza la temperatura máxima? ¿Cuál es? ¿Y la mínima?

f. ¿En algún momento se alcanza la misma temperatura que a las 12 del mediodía? ¿Qué temperatura es?



TRABAJO PRACTICO Nº 4 – Función lineal

1.- Considera las siguientes funciones lineales definidas de R en R.

$y = \frac{1}{2}x + 1$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x - 3$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x$

a) ¿Qué tienen en común las tres funciones?

b) ¿Es alguna de ellas una función de proporcionalidad directa? ¿Cuál?

c) Represéntalas gráficamente. ¿Cómo son las rectas obtenidas?

d) Escribe las fórmulas de otras dos funciones cuyas gráficas sean rectas paralelas a las dadas.

2.- Verificar si las rectas r y r' son perpendiculares, paralelas , coincidentes o solo se intersectan

a) r: $y + x = -1$ $\quad$ r' : $-2x + y = 2$

b) r: $6y + 1 = 3x$ $\quad$ r': $x = -6 + 2y$

c) r: $-4x + 2y + 1 = 0$ $\quad$ r': $-2y + 6 + x = 0$

3.- Dada la recta $6y - x + 12 = 0$

a) Escribir una recta paralela a la dada que pase por el origen.

b) Escribir una recta paralela a la dada que no pase por el origen.

c) Escribir una recta perpendicular a la dada que pase por el origen.

d) Escribir una recta perpendicular a la dada que no pase por el origen.

e) escribir una recta perpendicular a la dada que pase por el punto $(\frac{1}{2}, 6)$.

f) dibujar todas las rectas en un mismo sistema de ejes

4.- Dadas las rectas $4x - ky = 0$; $0 = y - 3x + 2$; determine el valor de k de modo que :

a) las rectas sean paralelas $\qquad$ b) las rectas sean perpendiculares

5.- Calcular el valor de k de modo que la recta $kx + 2y - 3 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje x

6.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

a) $(2, 3)$ $(4, 5)$ $\qquad$ b) $(1, 1/3)$ $(\frac{1}{2}, -1/3)$ $\qquad$ c) $(4, -2)$ $(-4, -2)$

d) $(3, 7)$ $(3, 3/2)$ $\qquad$ e) $(\frac{1}{2}, 1/3)$ $(0, 0)$ $\qquad$ f) $(1, -1)$ $(-1, 1)$

7.- Los puntos $A = (m+n\ ;\ 4)$ y $B = (7\ ;\ n)$ están ubicados sobre una recta vertical y la distancia entre ellos es 2 unidades. Entonces el producto m.n es : $\boxed{}$

a) 4 b) 6 c) 12 d) 14 e) 22

8. Sea L la recta que pasa por A(−1, 0) y B (5, 1)

a) Hallar la ecuación de L y comprobarla.
b) Mostrar otros dos puntos de L.
c) ¿Cuáles de estos puntos pertenecen a L: (3, 6) (10, 2) (−7,−1) ?

9.- Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto p y tiene pendiente m:

a) P(-2; -4) m = 5/4 b) P(-6, -3) m = 0,3 b) P(-5, 0) m = -2

10. Determinar el valor de k para que el punto dado pertenezca a la recta:

a) $2x + ky = 0$ (−1, 3)
b) $(k − 1)x + 3ky = 2(k + 1)$ (2, −2)

11.- Hallar la ecuación de la recta:

a) que pasa por P(−4;1) y es perpendicular a la recta $3x − 3y - 8 = 0$
b) que pasa por P(2,5) y es paralela a la recta $6x − 3y - 5 = 0$
c) es paralela a la recta $2x − 8y + 1 = 0$ y su ordenada al origen es -7

12.- La ecuación $(2 − k)\ x + 3y − 4 = 0$ representa una recta perpendicular a la recta cuya ecuación $− 6x + y − 9 = 0$. ¿Cuál es el valor de k ?

13.- Hallar los vértices del triángulo determinado por las rectas:

L_1: $3x − 2y = −6$ L_2: $2y + x = 6$ L_3 : $6y − x = 2$ y representarlo gráficamente.

14.- ¿Cuál de las siguientes rectas del plano cartesiano es representada por la ecuación $x = a$?

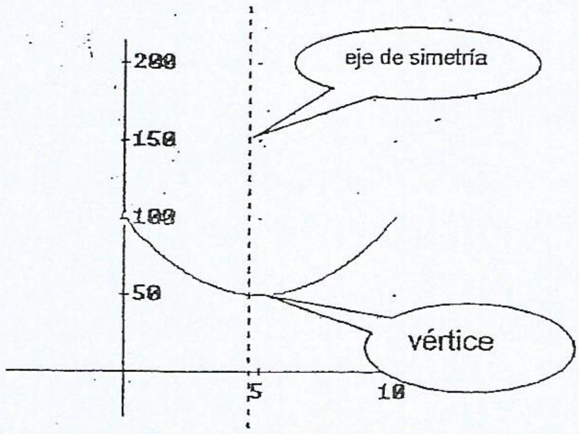
A) La recta paralela al eje X que pasa por el punto (0, a).
B) La recta paralela al eje X que pasa por el punto (a, 0).
C) La recta paralela al eje Y que pasa por el punto (0, a).
D) La recta paralela al eje Y que pasa por el punto (a, 0).
E) La recta que pasa por el origen y por el punto (a, a).

15.- La ecuación $(2 - k)x + 3y - 4 = 0$ representa una recta perpendicular a la recta cuya ecuación es $- 6x + y - 9 = 0$. ¿Cuál es el valor de k ?

A) 20 B) 3/2 C) 8 D) 7/2 E) 13/6

TRABAJO PRACTICO N° 5 – Función cuadrática

Su ecuación tiene la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$ Su gráfico es una curva llamada **parábola**



Las dos ramas de esta curva son simétricas respecto de una recta vertical, ésta se llama **eje de simetría.** Un punto característico de esta curva es por el que pasa su eje de simetría, ese punto se llama **vértice** de la parábola, que es único.

1.- Identifica entre las siguientes funciones las que corresponden a funciones cuadráticas:

$y = 3\,x^2 - 1$ $\qquad y\,.\,x = 2$ $\qquad y - x^2 = 6 + x$ $\qquad 3\,x - 2\,x^2 = y$ $\qquad y^2 = x^2 - 4$

2.- a) Determina las coordenadas del vértice en las funciones cuadráticas del ejercicio anterior

b) ¿Cuáles de estas funciones su gráfica es una parábola abierta hacia arriba? ¿Y cuál es abierta hacia abajo?

c) Represéntalas gráficamente. Indica dominio e imagen

3.- Para cada uno de los siguientes gráficos

i) Escribe las coordenadas del vértice.

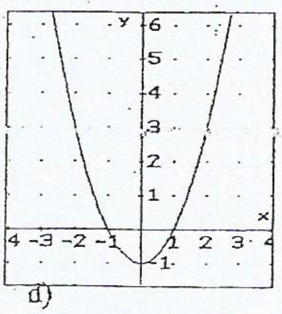
ii) Halla, en los casos en que exista, el o los valores x_1 y x_2 donde el gráfico corta al eje x.

iii) ¿En que gráficos es el coeficiente cuadrático positivo? ¿En cuáles es negativo?

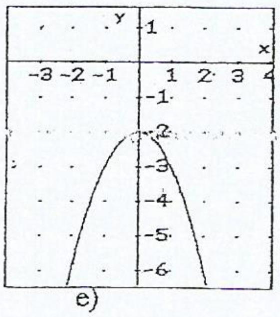
iv) Indica dominio e imagen de cada gráfico funcional

v) Escribe la fórmula de la función $y = f(x)$ que corresponde a cada uno de los gráficos.

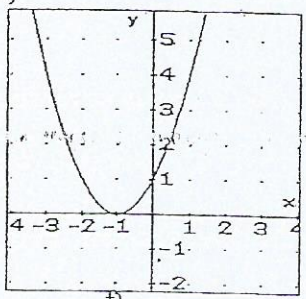
a)



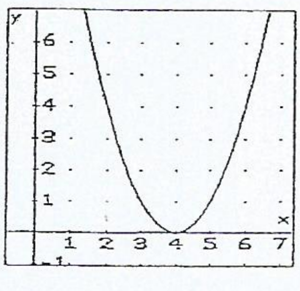
b)



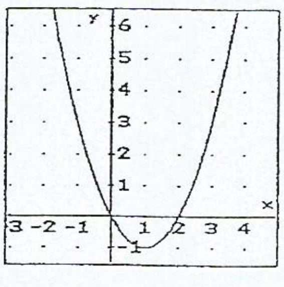
c)



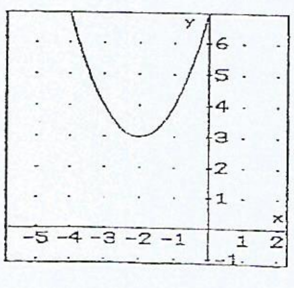
d)



e)



f)



4.- Determine la fórmula de función cuadrática que se anule para:

a) $x = 2$ y $x = 8$ y que tenga un punto de mínima altura en $y = -2$

b) $x = 1$ y $x = -3$ y que tenga un punto de máxima altura en $y = 3$

5.- En la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + 6$ las coordenadas del vértice son: $\boxed{}$

a) (2.5 ; - 0.25) b) (3 , 4) c) (-3 , -2) d) (- 2.25 , -0.5)

6.- La expresión de la función cuadrática cuya grafica pasa por P(-1,1) y tiene vértice en Q(1,-3) es:

a) $y = (-1/2)(x - 1)^2 - 3$ b) $y = 2(x + 1)^2 - 3$ c) $y = (x - 1)^2 - 3$

7.- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9).
Calcular el valor de a

8.- Indica, sin dibujarlas, en cuantos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 5x + 3$ b) $y = 2x^2 - 5x + 4$ c) $y = x^2 - 2x + 4$ d) $y = -x^2 - x + 3$

9.- Halla la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que la altura es la mitad de la base y el área es 32 cm^2.

10.- Calcula la longitud de una cañería sabiendo que una tercera parte es enterrada, su cuarta parte sumergida en agua y que sobresale de ésta 3 m.

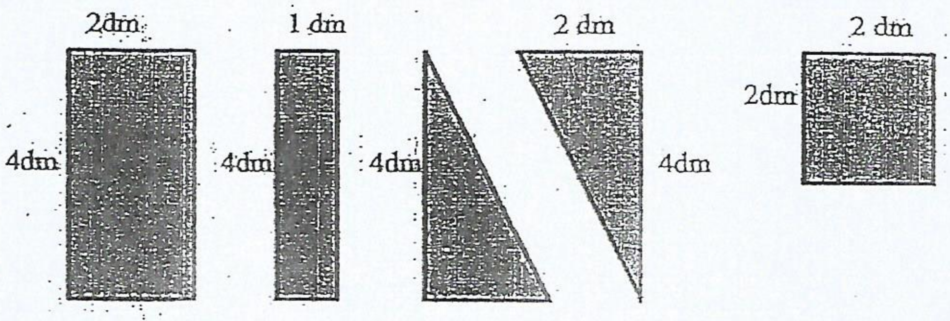
11.- En un cuadro se encuentran reunidos 135 animales entre vacas, novillos y vaquillonas. El número de las primeras supera al de novillos en diez, y el de ambos supera al de vaquillonas en cinco. ¿Cuántos novillos, vaquillonas y vacas habrá?

12.- Un estanciero vendió 5/7 de su tropilla de caballos, enseguida compró 12, teniendo entonces 48 caballos menos que al principio. ¿Cuántos caballos tenía antes de la primera venta?

13.- El área de un rectángulo es $2x^2 + 2x - 24$. Si uno de sus lados mide $(x - 3)$, el otro lado mide $\boxed{}$

A) $(x + 8)$ B) $2(x + 8)$ C) $2(x - 4)$ D) $2(x - 3)$ E) $2(x + 4)$

14.- Un carpintero, tiene las siguientes tablas con sus respectivas medidas:



¿Cuántos círculos del mismo radio puede trazar el carpintero en todas las tablas si en la tabla más grande se tranzan como máximo 8 de estos círculos?

a) 18 b) 19 c) 20 d) 16 e) 22

15.- El largo de una piscina rectangular es el doble de su ancho. Se construyó una cerca, rodeándola, separada un metro de sus bordes. Si el área cercada es de 40 m^2, ¿cuál es el largo de la piscina de la figura 1 ?

A) 3 m B)6 m C)12 m D) $\sqrt{80}$ m E) $\frac{-3+\sqrt{165}}{2}\,m$

TRABAJO PRACTICO Nº 6 – polinomios- Teorema del Resto – Regla de Ruffini

1.- Realizar las siguientes operaciones.

a) $(a^4 - 3a^2 + 1)(2a - 1) - (5a^3 + 2a^2 - 5a - 3)(-2a)^2 =$

b) $(-3 - x)[(x + 2)(2x - 1) - (x - 1)(2 + x)] - 10x^3 =$

2.- Simplificar las siguientes expresiones.

a) $[a^2(a - 1) - a(a^2 + 1)]^2 - a^2(a + 1)^2 + \left(-\frac{2}{3}a\right)^2 =$

b) $y^2(x + 1)^2 - (x - 1)^2\,2y - (xy - y)(xy + y) =$

c) $9x^2(a^2 - 3b)(a^2 + 3b) - (3a^2x + 2ay)^2 =$

3.- Siendo $P(x) = 6x^3 - 2x^4 + x$, $Q(x) = -2x^2 + 5x^3 - 2$ y $R(x) = 3 - x$. Calcular:

a) $P(x) + Q(x)$.
d) $P(x) . Q(x)$.
b) $5R(x) - Q(x)$.
e) $P(x) . R(x)$.

4.- Siendo $P(x) = -0{,}5x^9$, $Q(x) = -\frac{5}{2}x^2$, $R(x) = -3x^6$ $S(x) = x^{11} + 3x^7 + x^2 + 7x^3$, calcular:

a) $P(x) : Q(x)$.
c) $P(x) - Q(x) : R(x)$
b) $P(x) + Q(x) : R(x)$
d) $S(x) : Q(x) + Q(x)$

5.- Escribir dos polinomios de 6° grado cuya suma sea de 2° grado.

6.- ¿Qué término continúa?

$(4 + x^2)$, $(7 + x^3)$, $(11 + x^5)$, $(16 + x^8)$,...

a) $(22 + x^{10})$ b) $(20 + x^{12})$ c) $(20 + x^{10})$ d) $(20 + x^{15})$ e) $(22 + x^{12})$

7.- ¿Qué expresión hay que sumar a: $-7y + 5 - 8y^2$ para que la suma sea 1 ?.

8.- Hallar m para que A sea divisible por B, siendo $A(x) = 5x^4 + mx + 3x$, $B(x) = x - 3$.

9.- Resuelva los siguientes problemas. ($x \in \mathbf{R}$).

a) Un campo rectangular tiene de perímetro $12x^3 + 20x^2 + 16$. Hallar la longitud de uno de sus lados si el otro vale: $4x^2 - 2$.

b) Calcular la superficie y el volumen de una esfera de radio: $0{,}5x^2 - 10$.

10.- Determinar si el polinomio Q(x) es divisor del polinomio P(x), siendo:

a) $Q(x) = x + 1$ y $P(x) = x^5 + 1$

b) $Q(x) = x - 2$ y $P(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 3x - 2$.

c) $Q(x) = x + 5$ y $P(x) = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$.

d) $Q(x) = x - 5$ y $P(x) = x^3 - 125$.

11.- Calcular el resto de las siguientes divisiones aplicando teorema del resto y regla de Ruffini.

a) $(x^3 + 2x - 1) : (x - 2)$.

b) $(x^2 - 8x + x^4 + 1) : (x + 1)$.

c) $(x^3 - ax^2 + ax - a^2) : (x - a)$.

d) $(x^2 + 2xb + b^2) : (x + b)$.

12.- Encontrar k para que al dividir $(5x^2 + kx + 2)$ por $(x + 1)$ se obtenga de resto 8.

13.- a) Calcula k para que el resto de la siguiente división $5x^4 + x^2 - kx - 4 : (x - 2)$ sea -3.

b) Calcula k para que el resto de la siguiente división $5x^4 + x^2 - kx - 4 : (x - 2)$ sea 0

14.- Sabiendo que 2, 3 y -1 son ceros de un polinomio de tercer grado y que el coeficiente del término de mayor grado es 5, escribir el polinomio.

15.- Hallar el valor de m para que $2x^3 + mx - 3x - 4$ sea divisible por $x + 1$

16.- Calcular b para que A sea divisible por B siendo $A(x) = 6x^4 + bx + 3x$ $B(x) = x - 3$

17.- Hallar m para que la siguiente división sea exacta $(5x^2 - mx + 3) : (x + 2)$.

18.- Determinar a y b para que $P(x) = Q(x)$

$P(x) = 2 + 5x^3$ $\qquad$ $Q(x) = a + (a + b)x^3$

TRABAJO PRÁCTICO N° 7 –Factor Común –en Grupos- Trinomio Cuadrado y Cuatrinomio Cubo Perfectos

1.- Extraer Factor Común en las siguientes expresiones.

a) $6ab + 14ac - 2ad$. b) $2x^3y - 3x^2y + 11x^4y^2 - 9x^3y^3$. c) $2(x - y)^3 - 3x(x - y)^3 + 5a(x - y)$.

e) $\frac{2}{9}z^5 - \frac{10}{3}z^3y + \frac{2}{3}z^2y$

f) $\frac{77}{100}a^8x + \frac{56}{10}ax^8 + \frac{84}{1000}a^2x^3$

g) $\frac{1}{5}x(a+b)^2 - \frac{4}{3}x(a+b)^2 + (a+b)^2$

2.- Extraer factor común en grupo de igual número de términos.

a) $5a^2x + 5a^2y + yx + y^2$

b) $15a - 3ax - 5b + bx$

c) $a^2m^3 - 2a^2n - m^3b + 2nb$

3.- Para cada uno de los siguientes polinomios aplicar factor común en grupo de igual número de términos. a) $3x^5 + 6x^4 + 5x + 10$

b) $2x^3 - 2x^2 + x - 1$

c) $-1 - 2x + x^2 + 2x^3$

d) $3x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 3x^2 + 12x - 9$

e) $-2x^8 + 12x^7 - 18x^6 + 2x^2 - 12x + 18$

4.- Dados los siguientes trinomios.

a) $4b^2 + 28b + 49$ b) $9 + 4x^2 - 12x$

c) $x^4 + x^2 + x^3$ d) $-9 + x^4 - 6x^2$

e) $4x + 4x^2 + 1$ f) $x + x^2 + 0{,}25$

i) Determinar si son trinomios cuadrados perfectos. Si lo son, factorearlos.

ii) Determinar las raíces reales de los que sean trinomios cuadrados perfectos.

5.- Completar los siguientes trinomios para que sean cuadrados perfectos.

a) $x^2z^4 - 2xz^2 +$ ....

b) $4a^2x + 9 +$ ....

6.- Dados los siguientes cuadrinomios determinar si son cuatrinomios cubos perfectos. Si lo son, factorearlos

a) $b^6 - 6b^4 + 12b^2 - 8$

b) $x^6 + 9x^4 + 27x + 27$

c) $-125 + 8x^3 - 60x^2 + 150x$

f) $\frac{1}{125} + 8b^6 - \frac{6}{25}b + \frac{12}{5}b^4$

g) $-\frac{1}{27} - x^2 - x^3 - \frac{1}{3}x$

7.- Completar los siguientes cuatrinomios para que sean cubos perfectos.

a) $27b^3 + 64a^3b^3 +$ .... + ...

b) $x^3 - 9x^2y +$ .... - ....

c) $64x^3 + 3xy^2 +$ .... + ...

d) $x^3 - 12b^3x^2 +$ .... - ....

e) $-9a^{12}b^4 - 27a^{12}b^5$ - .... - ....

TRABAJO PRÁCTICO 8 –Suma o Diferencia de dos Potencias de igual grado- Expresiones Algebraicas Racionales

1.- Descomponer en dos factores.

a) $100 - a^8$

b) $16y^2 - 64z^8$

d) $-\frac{1}{81}a^4b^2 - 0{,}04n^6$

e) $0{,}36b^4a^2 - \frac{4}{25}b^6$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^8 a^4x^6 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 b^2y^8$

2.- Factorear y reducir a su forma más simple.

a) $(p-x)^2-(p+2)^2$

b) $81y^2-(q-y)^2$

c) $(x^2-4)^2-x^4$

d) $121(x+y)^2-49(x-y)^2$

e) $(x-a)^2-(x+b)^2$

3.- Factorear, de ser posible, las siguientes expresiones.

a) $(x+y)^2-1$

b) x^7+y^7

c) $p^6-(p+2)^3$

d) $-1+27p^3$

e) $z^5-\frac{1}{243}$

f) $\frac{8}{27}m^6+64b^3$

g) $32x^5+\frac{1}{1024}$

4.- Factorear las siguientes expresiones.

a) $x^4-\frac{1}{256}y^{16}$

b) $10.000-\frac{1}{256}x^4$

c) $1-p^8$

5.- Aplicar los distintos casos de factoreo a las siguientes expresiones.

a) $5x+5bx+ax+abx$

b) $4a^2b^3+4ab^3c+b^3c^2$

c) $7x^6y^4-7y^4z^6$

d) $48x^3y^4-243x^3z^8$

e) $45x^3-60x^2y+20xy^2+18x^2z-24xyz+8y^2z$

f) $a^5-a^3-a^2+1$

6.-La suma de los perímetros de dos cuadrados es 80 cm, y la diferencia de sus áreas es 80 cm2, ¿cuál es la suma de las áreas?

A) 144 cm^2 B) 242 cm^2 C) 160 cm^2 D) 108 cm^2 E) 208 cm^2

7.- Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

c) $\frac{16-a^4}{8+4a+2a^2+a^3}=$

b) $\frac{\frac{1}{4}p^2-pq+q^2}{\frac{1}{8}p-\frac{1}{4}q}=$

d) $\sqrt{(p^4+4)^2-(p^4-4)^2}=$

8.- Realizar las siguientes sumas algebraicas llevándolas a su forma más simple.

a) $\frac{2a+3b}{6a}+\frac{b}{3a^2}-\frac{3a}{9a^3}=$

b) $\frac{3}{4y-16}-\frac{1}{y+4}-\frac{y+10}{y^2-16}=$

c) $\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{6}-4-\frac{x}{3}=$

d) $\frac{2b}{b^2+4b+4}-\frac{1}{5b+10}-\frac{\frac{4}{5}b}{b^2-4}=$

3.- Simplifique las siguientes expresiones llevándolas a su forma más simple

a) $\frac{ab}{a-b}\cdot\frac{-c+a}{a^2+ab}\cdot\frac{a^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{-c-a}{c}=$

b) $\frac{(1-a)^2}{8ay}\cdot\frac{4xb}{1-a^2}\cdot\frac{2+2a}{(a-1)bx}=$

c) $\frac{x^2+xy+xz+yz}{3x^2-3z^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{6x+6y}{x+z}=$

d) $\frac{5bx+10b+5bm}{(x+2)(x^2+2x+4)}\div\frac{5bx-10b}{x^3-8}=$

e) $\frac{y^2-6y+9}{ym-3m+y-3}\div\frac{ym-3m-y+3}{m^2-1}=$

f) $\frac{x^3-8}{x^2-4}\div\frac{2x^4+4x^3+8x^2}{2x^3+4x^2}=$

4.- Realizar las siguientes operaciones combinadas, expréselas en su forma más simple.

a) $\frac{a+\frac{a+1}{a+2}}{3+\frac{1}{a^2-4}}=$

b) $\frac{\left(4-\frac{x-1}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{x+1}{4}\right)}{4x-\frac{2-2x}{4}}=$

c) $\frac{1+\frac{1}{r-2}}{\frac{x^3-8}{x^2-4}\cdot\frac{2x^3+4x^2}{2x^4+4x^3+8x^2}}=$

d) $\frac{\frac{2x}{3a-6x}+\frac{1}{3}-\frac{2a}{a-2x}}{\frac{a}{a-2x}+\frac{a}{a+2a}}=$

e) $\left(\frac{2}{a^2-4}+4\right)\div\left(\frac{3}{a-2}-\frac{5}{a+2}\right)=$

f) $\left(\frac{1+x}{2x-x^2}-\frac{1-x}{x^2+2x}+\frac{1}{4-x^2}\right)\div\left(\frac{5}{2+x}-\frac{4}{2-x}+\frac{9}{4-x^2}\right)=$

TRABAJO PRACTICO 9 Sistemas de ecuaciones lineales

1.- Resolver gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2y=3x-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ -3x+y=-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-2y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y+1=2x \\ 4-y=0.5x \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 0.5(5+y)=x \end{cases}$

2.- Hallar el valor de a para que (4000 , 3000) sea la solución del sistema $\begin{cases} y=0.75x \\ y=ax+500 \end{cases}$

3.- Sea el sistema $\begin{cases} 2x+ay=13 \\ x-y=-1 \end{cases}$

a) ¿Para que valor de a la solución es (2, 3)?
b) ¿ Para que valor de a el sistema no tiene solución?
c) ¿ Para que valor de a el sistema tiene infinitas soluciones?

4.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución o igualación:

a) $\begin{cases} 0{,}6\,x - 0{,}8\,y = 1 \\ 7/3\,x = -2\,y + 4/3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 1{,}5 = 0 \\ 5\,x - 7y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3 = x - y \\ y - 3\,x = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 5\,x - 1 \\ 4\,(y + 1) = x \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{4x+3y}{5} - \dfrac{x}{3} = -\dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{24} \\ \dfrac{3x+y}{10} + \dfrac{1}{2} = 2x + 4y \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{5x-10y}{13} = \dfrac{5}{3}(y-x) \\ \dfrac{10x-5y}{11} + 5 = x + y \end{cases}$

5.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de determinantes:

a) $\begin{cases} 5\,x + 3\,y = 5 \\ 4\,x + 7\,y = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7\,x + 7 = 5\,y - 10 \\ 2\,x - y + 17 = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3\,x - 4\,y = 13 \\ 8\,x - 5y = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 4 \\ \dfrac{x-y-1}{x+y+1} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

6.- ¿ Cuándo no puede aplicarse el método de determinantes para resolver un sistema?

7.- De un número de dos cifras se sabe que la suma del dígito de las unidades y el de las decenas es 13. Si a dicho número se le resta 27, las cifras se invierten. ¿Cuál es el producto de las dos cifras del número?

a) 30 b) 32 c) 36 d) 40 e) 34

TRABAJO PRACTICO 10 Sistemas de ecuaciones lineales – Problemas

1.- La diferencia entre dos números es 64. Si a los 2/3 del mayor número se le suma los 3/5 del menor se obtiene el número 87. ¿Cuáles son los números?

2.- La resta de dos lados consecutivos de un rectángulo, tiene por medida siete. Encuentra estos dos lados sabiendo que el perímetro del rectángulo tiene por medida 26.

3.- Calcule la longitud de la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base es igual a las ¾ partes de la altura y que el área es 48.

4.- Calcule el área de un cuadrado sabiendo que si el lado se incrementa en dos unidades, su área se incrementa en 36.

5.- De un número de dos cifras se sabe que la suma del dígito de las unidades y el de las decenas es 13. Si a dicho número se le resta 27, las cifras se invierten. ¿Cuál es el producto de las dos cifras del número?

a) 30 b) 32 c) 36 d) 40 e) 34

6.- Para pintar una casa se compraron 12 latas de pintura, algunas de 5 l. y otras de 10 l. En total son 100 l. ¿Cuántas latas de cada tipo se compraron?

7.- En un grupo de 35 personas habían 10 hombres menos que el duplo de mujeres. ¿Cuantos hombres y mujeres había?

8.- Se sabe que 4 conejas y 3 conejitos pesan 15 kg. y que 3 conejas y 4 conejitos pesan 13 kg. Suponiendo que todas las conejas pesan lo mismo y los conejitos también son iguales, calcula el peso de cada coneja y cada conejito.

9.- Por dos kilogramos de azúcar y cinco de café se pagaron $ 41,60. Si el precio del café disminuye un 10%, por la misma compra se pagará $ 37,60. Halla el precio inicial, por kg., de cada artículo.

10. Si se aumenta en 2 m el largo y el ancho de un rectángulo el perímetro resulta de 30 m. Si el largo se disminuye en 2 m, resulta un cuadrado. Calcula las dimensiones del rectángulo.

11.- El perímetro de una parcela rectangular es de 18 m, y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones de la parcela.

12.- El perímetro de una sala rectangular es 56 m. Si el largo disminuye en 2 m y el ancho se aumenta en 2 m , la sala se hace cuadrada. Hallar las dimensiones de la sala.

13-En el colegio, algunas aulas tienen 30 bancos y otras tienen 35. Si en total hay 19 aulas y 630 bancos, ¿ Cuántas aulas de 30 bancos y cuantas aulas de 35 bancos hay?

TRABAJO PRACTICO N° 11 Trigonometría

Uno de los sistemas muy usados para medir ángulos es el Sexagesimal, modo DEG en las calculadoras, por ejemplo $\hat{\alpha} = 25°21'36''$ es la expresión en grados sexagesimales del ángulo $\hat{\alpha}$. También podemos, en el mismo sistema, tener la expresión decimal del mismo ángulo $\hat{\alpha} = 25,36°$.

Algunas calculadoras hacen esta conversión en forma inmediata, haciendo uso de la tecla $\boxed{°\,'\,''}$ Debe seguirse la siguiente secuencia 25, $\boxed{°\,'\,''}$, 21 $\boxed{°\,'\,''}$, 36, $\boxed{°\,'\,''}$, $\boxed{=}$, determinándose 25,36°.

Otras calculadoras tienen la tecla DMS (degree, minutes, seconds) que en algunos casos combinados con la tecla INV o SHIFT permite obtener 25,36° pulsando 25.2136 SHIFT (si corresponde) DMS.

Si no disponemos de una calculadora con esta función, podemos obtener la expresión decimal de $\hat{\alpha} = 25°21'36''$ de la siguiente forma $\hat{\alpha} = 25 + \dfrac{21}{60} + \dfrac{36}{3600} = 25,36$ o sea 25,36°.

Para hacer el proceso inverso, es decir si tenemos la expresión decimal de un ángulo en el sistema sexagesimal, y queremos obtener su expresión en grados, minutos y segundos sexagesimales, procedemos así:

$\hat{\alpha} = 25.36°$

$\hat{\alpha} = 25° + 0,36$ $\qquad \dfrac{1}{0,36°} = \dfrac{60'}{x} = x = 21,6$

$\hat{\alpha} = 25° 21,6'$

$\hat{\alpha} = 25° 21' 36''$ $\qquad \dfrac{1}{0,6'} = \dfrac{60''}{x} = x = 36''$

Finalmente $\hat{\alpha} = 25,36°$ o $\alpha = 25° 21' 36''$

Para obtener el mismo resultado con calculadora científica, debe pulsarse la secuencia 25.36 (si corresponde) $\boxed{°\,'\,''}$ o bien 25.36 SHIFT (si corresponde) DMS para obtener 25.2136 o sea 25° 21'36".

Otro sistema para medir ángulos es el radial (modo RAD en las calculadoras).

1.- a) Colocar la calculadora en modo DEG y calcular coseno de 45°.
Colocar la calculadora en modo RAD y calcular coseno de 45.
¿Por qué se han obtenido distintos valores?.
b) Colocar la calculadora en modo DEG y calcular arco seno de 0,5.

Colocar la calculadora en modo RAD y calcular arco seno de 0,5.
¿Por qué se han obtenido distintos valores?
c) Colocar la calculadora en modo DEG y calcular tangente de 45°.

Colocar la calculadora en modo RAD y calcular tangente de $\frac{\pi}{4}$.

¿Por qué se ha obtenido el mismo resultado?

2.- Como ambos sistemas (sexagesimal y radial) sirven para un mismo propósito, existe entre ellos una equivalencia.

Completar la siguiente tabla que nos ayudará a realizar el pasaje de un sistema a otro de cualquier ángulo dado.

Sistemas	
Sexagesimal	Radial
90°	
	π
270°	
	2.π

3.- Dados los siguientes ángulos 108.000", $\frac{5}{3}\pi$, 120°, 2,098, 1,0559, 300,01°.

a) Ordenarlos de menor a mayor en el sistema sexagesimal notación decimal y notación en grados, minutos y segundos.
b) Ordenarlos de mayor a menor en el sistema radial.

4.- La suma de dos ángulos es 81° y su diferencia es 40°. ¿Cuál es el valor de cada uno de estos ángulos?
5.- Determinar la longitud de un arco de circunferencia con radio 3 cm, sabiendo que está subtendido por un ángulo de:

a) 2,5 radianes. b) $\frac{\pi}{6}$. c) 65°. d) 60° 45'.

6.- Indicar cuáles de los siguientes pares de ángulos son congruentes.

a) –60° y 660° d) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2}{3}\pi$

b) 70° y 800°. e) $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{13}{6}\pi$

c) 45° y 1485°. f) $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7}{4}\pi$

7.- Escribir la expresión general de todos los ángulos congruentes con:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) –18° c) 60° d) $-\frac{2}{3}\pi$

8.- Expresa en radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales.

a) 203° 25'= b) 120°= c) 125°=

d) 38°40'= e) 1°= f) 210°=

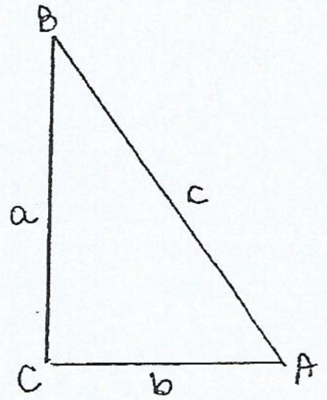
9.- Expresa, aproximadamente, en grados sexagesimales, los siguientes ángulos expresados en el sistema circular. a) π/4 b) 1,3 c) 1 d) 2,5 e) π f) 0,25

TRABAJO PRACTICO N° 12 Trigonometría-

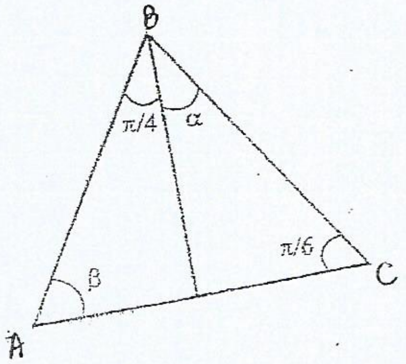
1.- Un triángulo ABC tiene un ángulo recto C y dos ángulos agudos A y B. Los lados del triángulo AC y BC de ambos lados del ángulo recto C están dados como:

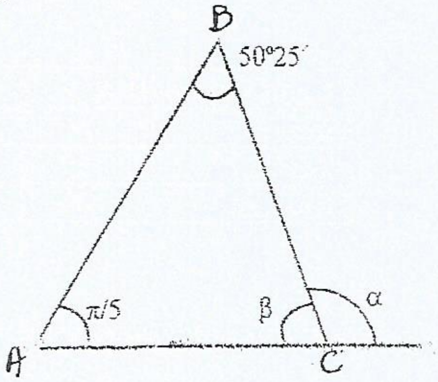
(a) AC = 3 BC = 4
(b) AC = 5 BC = 12
(c) AC = 8 BC = 15

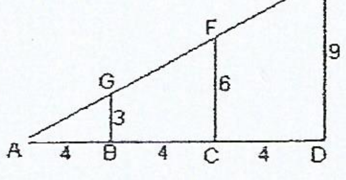
En cada caso, use el teorema de Pitágoras para encontrar el tercer lado y luego encuentre el seno y el coseno de los ángulos A y B.



2) Halla α y β en cada uno de los siguientes triángulos.







3.- Dada la siguiente figura:

Calcular las seis funciones trigonométricas para en los triángulos rectángulos:

i) ABG. ii) ACF. iii)ADE.

4.- Dibuja un ángulo de 50°. Traza una perpendicular a uno de sus lados y mide los lados del triángulo obtenido. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 50°.

5. Utiliza tu calculadora para completar esta tabla.

	0°	10°	20°	30°	45°	60°	80°	90°
Seno								
Coseno								
Tangente								

6. Resuelve con calculadora.

a) sen 30°25´= b) cos 120°= c) sec 30°52´=

d) cos 2 π /3= e) tg π /4 = f) cosec π /6 =

g) sen 220°28´= h) tg 120°54´= i) cotg 288°20´=

7. Resuelve con calculadora, exprese el resultado en grados y en radianes:

a) arc cos 0,5= b) arc tg 2,58= c) arc sen 0,5=
d) arc cos 0,899= e) arc tg 1,2= f) arc sen 0,35=

8. Con estos datos: sen α = 0,3907311 cos β = 0,8910065 tg γ = 1,482561.
Encuentra, usando tu calculadora, α, β y γ.

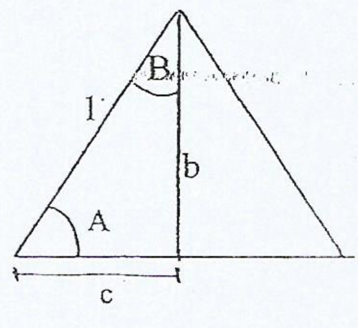
9. Pasa tu calculadora al modo RAD y completa la tabla:

Angulo en radianes	0	1	1,5	π/9	π/6	π/4	π/3	π/2
Seno								
Coseno								
Tangente								

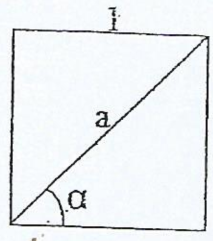
10. Observa el triángulo equilátero de la figura:

a) Calcula los ángulos A y B y las distancias b y c.

b) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos A y B.



11) Observa el cuadrado de la figura.



a) ¿Cuánto mide el ángulo α?
Calcula la longitud de a.

b) Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.

12) Contesta verdadero o falso:

a) El seno de un ángulo es siempre menor o igual que 1.

b) Existen ángulos que tienen los valores de seno, coseno y tangente negativos.

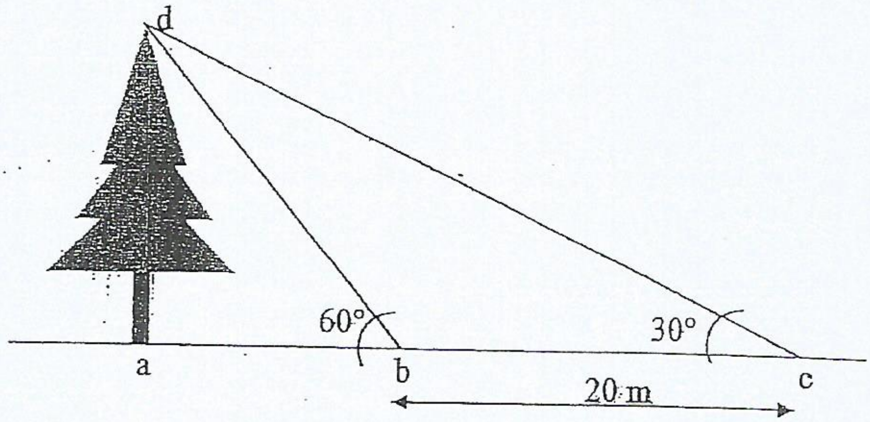
c) Existen ángulos en los que el seno y el coseno son positivos y la tangente negativa.

d) En cualquier ángulo mayor que $\pi/2$ y menor que π, el seno es mayor que la tangente.

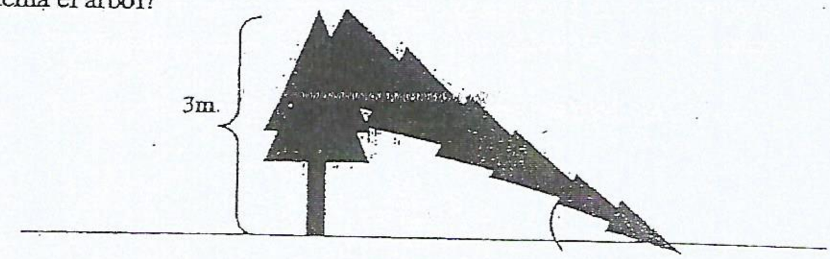
e) En cualquier ángulo el valor absoluto del seno es igual o menor que el de la tangente.

TRABAJO PRACTICO Nº 15 Resolución de triángulos – problemas

1) Determinen la altura de un árbol, si el ángulo de elevación de su parte superior cambia de 30º a 60º cuando el observador avanza 20 m hacia la base de éste.



2) Un árbol quebrado forma un ángulo recto con el suelo. Si la parte quebrada forma un ángulo de 40° con el piso y la copa del árbol se eleva hasta una altura de 3 m desde la base, ¿Qué altura tenía el árbol?



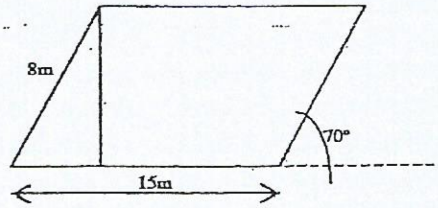
3) Un hombre maneja su automóvil a lo largo de un camino cuya inclinación es de 25° con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra respecto al punto de partida después de recorrer 700 m?

4) Dos caminos rectos se cortan formando entre ellos un ángulo de 60°. Encuentren la distancia más corta desde un camino hasta una estación de servicio situada en el otro camino a 2000 m del punto de intersección.

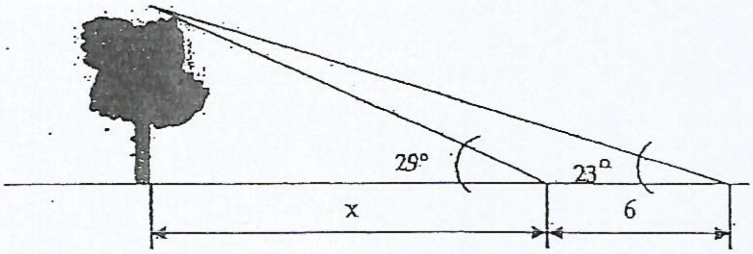
5) Una lancha a motor navega con rumbo norte y 40° al este durante 4 hs, a una velocidad de 60 km/h. ¿Qué distancia hacia el norte y qué distancia hacia el este ha recorrido?

6) En un triángulo rectángulo, el seno de uno de sus ángulos vale 0,8 y el cateto contiguo a ese ángulo vale 16 m. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

7) A $150 el metro cuadrado de patio, ¿cuál es el costo del patio representado en la figura?



8) En el tiempo en que la inclinación de los rayos del sol pasa de 29° a 23°, la sombra de un árbol se ha alargado 6 metros. ¿Cuál es la altura del arbol?



9.- Un satélite artificial sobrevuela una ciudad C y, en ese instante, en un observatorio situado a 300 km. de C, se le avista con un ángulo de elevación de 64°. ¿A qué distancia de la ciudad C está el satélite?

10.-Determina, aproximando al grado más cercano, la inclinación de los rayos solares en el instante en que un farol de 2,5 m. de altura proyecta una sombra de 3,2 m..

11.- Halla el ángulo de elevación de un avión que recorre 1500 m. para elevarse 800 m.

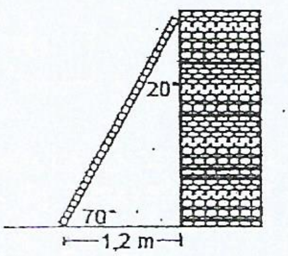
12.-El observador A ve el extremo superior del faro con una ángulo de elevación de 31°, y el observador B lo hace con un ángulo de elevación de 35°. Si los dos observadores están en el mismo plano vertical y a 5 m. uno de otro, halla la distancia de cada observador al faro y su altura

13.- ¿Cuáles de las siguientes expresiones representa (n) el largo de la escalera de la figura?

I) $\frac{1{,}2}{\text{sen } 20°}$ metros

II) $\frac{1{,}2}{\cos 70°}$ metros

III) $1{,}2 \cdot \cos 70°$ metros



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo I y III

TRABAJO PRACTICO N° 16

Leer previamente el ANEXO sobre Trigonometría dado al final de esta cartilla

1. Determinar el cuadrante en que se encuentra el ángulo en cada uno de los siguientes casos:

a) $\operatorname{sen} \alpha < 0$ y $\cos \alpha > 0$
b) $\operatorname{sen} \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$
c) $\operatorname{sen} \alpha < 0$ y $\operatorname{tg} \alpha > 0$
d) $\cos \alpha > 0$ y $\operatorname{tg} \alpha < 0$

2. Encontrar todos los ángulos α entre 0 y 2 π que satisfagan las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$ b: $\operatorname{sen} \alpha = 1$ c. $\operatorname{sen} \alpha = -0{,}32$

d. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ e. $\cos \alpha = -0{,}7$ f. $\cos \alpha = -3/2$

g. $2 \cos \alpha + \sqrt{2} = 0$ h. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ i. $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{cotg} \alpha$

j. $\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{3}/2 \operatorname{cosec} \alpha$

3.- Halle, cuando sea posible, los valores de x en $[0, 2\pi)$ que verifican las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{tg} x - \cos x = 0$ b) $5 \sec x - 4 \cos x = 8$ c) $2 \cos x + 1 = 0$

d) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$ e) $6 \cos^2 2x - \operatorname{sen} x - 5 = 0$ f) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

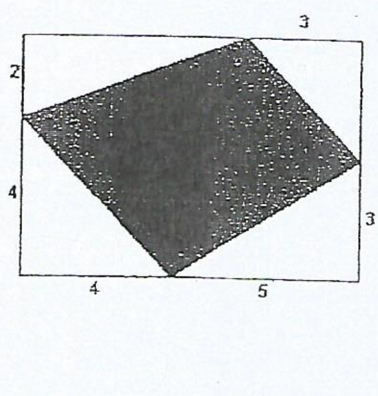
4.- Encuentre la expresión para todas las soluciones reales $(x \in R)$ de las ecuaciones dadas:

a) $\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x = 2\sqrt{3}$ b) $\operatorname{cotg}^2 x = 2$ c) $(2 \cos x + 1) \cdot (\operatorname{cosec} x + 2) = 0$

5.- Una torre de TV de 150 m de altura proyecta una sombra que mide 150m de longitud. A 148,8 m del pie de la torre y en la misma direccion que se proyecta la sombra, se encuentra un poste que mide 1,6 m de altura. Sabiendo que los puntos extremos de la sombra que proyectan la torre y el poste coinciden, ¿Qué altura tiene la torre?

6.- En una fotografía, María y Fernando miden 2,5 cm y 2,7 cm, respectivamente; en la realidad, María tiene una altura de 167,5 cm. ¿A qué escala está hecha la foto? ¿Qué altura tiene Fernando en la realidad?

7.- Determine el área de la región sombreada



8.- Verifique las siguientes identidades:

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \ . \ \operatorname{cosec} x$

b) $\operatorname{sen} x\,(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x) = 1 + \cos x$

c) $\operatorname{tg} x \ . \ \operatorname{sen} x + \cos x = \sec x$

d) $\operatorname{sen}^2 x\ (1 - \operatorname{cosec}^2 x) = -\cos^2 x$

d) $\operatorname{cotg}^2 \beta \ . \sec^2 \beta = 1 + \operatorname{cotg}^2 \beta$

e) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)\ \operatorname{tg} \alpha \ . \cos^2 \alpha = 1$

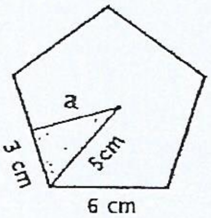
f) $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2 \operatorname{tg} x$

g) $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 2 \operatorname{cosec} x$

9.- Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles aumenta su largo en un 20% y el otro disminuye en el mismo porcentaje, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para el área del triángulo rectángulo resultante, respecto del área original ?

A) Se mantiene igual. B) Aumenta en un 4%. C) Disminuye en un 4%.
D) Aumenta al doble. E) Disminuye a la mitad.

10.- Hallar el perímetro y el área del pentágono regular :



TRABAJO PRACTICO 17 – Vectores

Lea previamente el ANEXO sobre Vectores dado al final de esta cartilla

1.- Representa en un sistema de ejes coordenados XY los siguientes vectores:

$\vec{v}_0 = (1,1)$ $\quad \vec{v}_1 = (5,-2)$ $\quad \vec{v}_2 = -2i$ $\quad \vec{v}_3 = (-3,-2)$ $\quad \vec{v}_4 = -4i+5j$

2.- Dados los puntos A (2 , 2) y B(5 , ½) , hallar analíticamente y gráficar los siguientes vectores:

$-2\,\overrightarrow{AB}$ $\quad 3/5\,\overrightarrow{AB}$ $\quad -4/3\,\overrightarrow{BA}$ $\quad 2\,\overrightarrow{AB}$

3.- Dados los puntos P(7,3) ; Q (–3,–6) ; O (0, 0) y R (–4 , 3) hallar:

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ $\quad 2\,\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PQ}$ $\quad \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{OR}$ $\quad -1/2\,\overrightarrow{OP} + 2/3\,\overrightarrow{PQ}$

Calcula el módulo de cada uno de los vectores obtenidos

4.- Sea $\vec{v}$ tal que $|\vec{v}| = 5$ y cuya dirección determina con el semieje positivo de las abscisas un ángulo de 30°. Encuentra la expresión canónica o binomial del vector $\vec{v}$

5.- Sean $\vec{v} = (3, 2)$ y $\vec{w} = 4i - 3j$, determina $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y $|\vec{v} + \vec{w}|$

6.- Dados los vectores: $\vec{v} = -5\,i + ½\,j$ $\quad \vec{w} = 1/3\,i - 4\,j$ $\quad \vec{m} = 9\,i + 3\,j$

Hallar los siguientes productos escalares:

$\vec{v} \bullet \vec{w}$ $\qquad \vec{m} \bullet \vec{v}$ $\qquad \vec{w} \bullet \vec{m}$ $\qquad \vec{w} \bullet \vec{w}$

7.- Calcular la resultante del sistema formado por los vectores A(3,-2); B(1,1) y C(2,2) por medio de la regla del paralelogramo. Luego encuentre la suma de estos vectores en forma analítica

8.- Dados los vectores $\vec{B} = 3\,i + 2\,j$ $\quad \vec{A} = (-2\,,\,4)$ $\quad \vec{C} = -5\,i - 2\,j$

a) Determine el ángulo que forma cada vector con el eje OX

b) descomponga gráficamente cada vector en dirección de los ejes cartesianos

c) encuentre el valor de $|v_x|$ y $|v_y|$ obtenidos al descomponer cada vector

9.- Represente gráficamente los vectores del ejercicio anterior en un sistema de ejes XY. Encuentre la resultante de estos vectores por medio del método de la poligonal . ¿ que ángulo forma esta resultante con el eje x?

ANEXO VECTORES

Los vectores son segmentos orientados que están caracterizados por los siguientes elementos:

- Punto de aplicación.
- Intensidad o módulo (siempre un número positivo)
- Dirección (orientación en el espacio de la recta que lo contiene)
- Sentido (uno de los dos posibles sobre la recta, indicado por una punta de flecha)

Se representan gráficamente mediante una flecha cuya dirección y sentido son los del vector y cuya longitud, en una escala adecuada, es proporcional al módulo o intensidad del vector.
Indicaremos que es magnitud vectorial colocando sobre su notación una pequeña flecha arriba ($\vec{A}$)
Para indicar el módulo del vector utilizaremos esa misma notación entre barras ($|\vec{A}|$)

Todo vector en R^2 (es decir, en el plano) puede representarse de varias formas:

Como par ordenado: $\vec{v} = (2, 3)$ donde 2 y 3 son las componentes del vector o bien

En forma binomial o canónica : $\vec{v} = 2\,\breve{i} + 3\,\breve{j}$ donde i y j son los versores

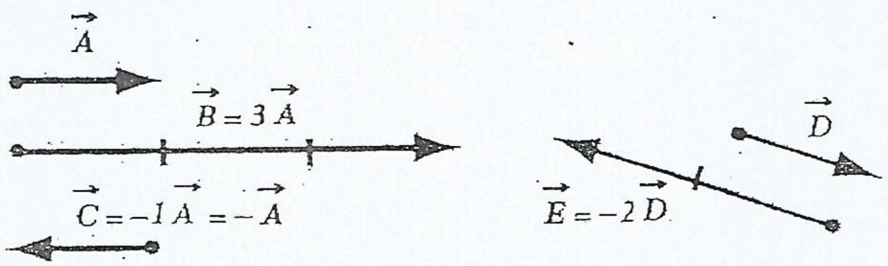
Módulo o intensidad: Módulo de $\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Operaciones con vectores

Las operaciones (suma, resta, multiplicación) entre vectores responden a reglas que no son las mismas que entre números.

Multiplicación de un vector por un número

Multiplicar un vector por un número es obtener un vector de igual dirección, de módulo igual al valor absoluto del número por la intensidad del vector y cuyo sentido es el mismo u opuesto al del vector dado según que el número sea positivo o negativo.
Observemos



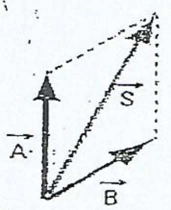
Observemos que si se multiplica un vector por el número –1 se obtiene el vector opuesto.

Suma de vectores:

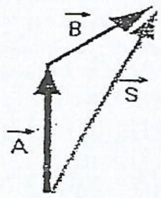
Si compramos un kilo de uva y dos kilos de manzanas, habremos comprado 3 kilos de fruta. Si la clase dura tres horas y se ocupa 1 hora en la explicación teórica, el intervalo es de 15 minutos quedan 1 hora 45 minutos para la parte práctica. De estos ejemplos es claro que para sumar o restar magnitudes escalares (como la masa y el tiempo) basta con sumar o restar los números de la cantidades correspondientes.
Sin embargo no sucede lo mismo con las magnitudes vectoriales.
Si al atravesar un río de corriente rápida sujetamos el timón transversalmente a la corriente e imprimimos a la lancha una velocidad de 3 m/s, pero la velocidad de la corriente de agua es 4 m/s, la lancha, vista desde tierra se mueve oblicuamente, ¿cuál es módulo de su velocidad?, ¿en qué dirección exacta se mueve? Es claro que esta información no se obtiene sumando algebraicamente los números. Para responder a estar preguntas debemos aprender a sumar vectores.

Existen dos métodos básicos equivalentes: el **método gráfico** que se basa en construcciones geométricas en escala y el **método analítico** que trabaja con las proyecciones de los vectores sobre un par de ejes perpendiculares.

Método gráfico para la suma de vectores



Regla del paralelogramo

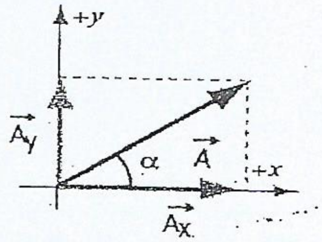


Método de la poligonal

Para sumar dos vectores gráficamente se aplica la llamada **regla del paralelogramo**: el vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores dados.

Otra manera de obtener gráficamente el vector suma, que resulta de mucha utilidad para sumar más de dos vectores, es mediante el **método de la poligonal** que consiste en poner los vectores a sumar uno a continuación de otro: el vector suma es el vector que une el origen del primer vector con el extremo del último.

Descomposicion de vectores

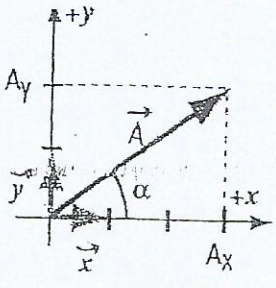


Observamos que el vector $\vec{A}$ es la diagonal del paralelogramo (rectángulo) de lados A_x y A_y

Un vector puede expresarse como la suma de dos vectores. En la figura el vector $\vec{A}$ se ha descompuesto según las direcciones perpendiculares de los ejes x e y. Podemos decir que el vector $\vec{A}$ es la suma vectorial de los vectores

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

podemos escribir entonces $\vec{A} = A_x \,\breve{\imath} + A_y \,\breve{\jmath}$ donde los números A_x y A_y son las componentes del vector $\vec{A}$. Pueden ser positivos o negativos o nulos.



Las componentes del vector $\vec{A}$ están relacionadas con su módulo y el ángulo que éste forma con uno de los ejes (convencionalmente se elige relacionarlo con el eje x.). Los vectores $\vec{A}$, $\vec{Ax}$ y $\vec{Ay}$ forman un triángulo rectángulo, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras puede determinarse el módulo del vector y, con funciones trigonométricas, hallarse el ángulo que forma con el eje x. Conocidas las componentes queda determinado en qué cuadrante está el vector y utilizando la función arcotangente y trabajando con los módulos de las componentes se puede ubicar el ángulo agudo entre el vector y la dirección horizontal.

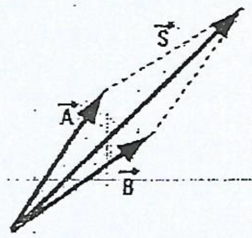
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6 \qquad \alpha = arctg\frac{|A_y|}{|A_x|} = arctg\frac{2}{3} = 33,7°$$

Si, inversamente, se conoce el módulo del vector $\vec{A}$ y el ángulo α, se pueden calcular sus componentes como:

$$A_x = |\vec{A}|\cos\alpha = 3,6 \cdot \cos 33,7° = 3 \qquad A_y = |\vec{A}|\, sen\alpha = 3,6 \cdot sen 33,7° = 2$$

Suma analítica de vectores

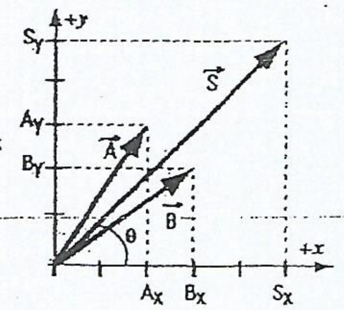
Consideremos dos vectores cualesquiera con origen en el mismo punto. Si se toma un par de ejes cartesianos ortogonales arbitrarios y se descomponen ambos vectores según estos ejes, cada vector se expresará en función de sus componentes. La componente x del vector suma se calcula, entonces, como la suma de las componentes x de los vectores dados. Un cálculo similar permite calcular la componente y del vector suma. El vector suma quedará de este modo expresado en componentes ortogonales y si se lo necesita, es posible calcular su módulo y su dirección utilizando el teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.



$$\bar{S} = \bar{A} + \bar{B}$$
$$\bar{S} = S_x \breve{x} + S_y \breve{y}$$

donde

$$S_x = A_x + B_x$$
$$S_y = A_y + B_y$$



$$\bar{S} = (2\breve{x} + 3\breve{y}) + (3\breve{x} + 2\breve{y})$$
$$\bar{S} = 5\breve{x} + 5\breve{y}$$

donde

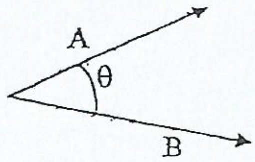
$$S_x = 2+3$$
$$S_y = 3+2$$
$$|\bar{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7{,}07$$
$$\theta = arctg\frac{S_y}{S_x} = 45°$$

Producto escalar

Hasta aquí hemos considerado la suma y resta de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar. Dos clases de producto entre vectores son utilizados comunmente en la Física: el **producto escalar**, que da por resultado un escalar (un número), y el **producto vectorial**, que da por resultado otro vector. Aquí sólo definiremos el producto escalar que denotaremos con un punto grueso:

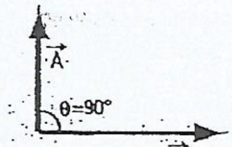
Consideremos dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Llamamos producto escalar de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$, y lo denotamos $A \bullet B$, al escalar que resulta de multiplicar el módulo de cada vector por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. En símbolos:

$$A \bullet B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos\theta$$



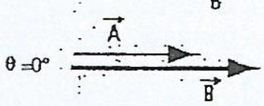
Si los vectores están dados en su forma binomial, el producto escalar es la suma de los productos de componente por componente de cada vector:

$A = a\, i + b\, j$ $\quad B = c\, i + d\, j$ $\quad$ entonces $\quad A \bullet B = a \,.\, c + b \,.\, d$



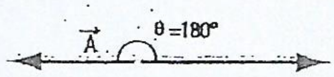
Si los vectores son perpendiculares, θ = 90°, entonces el producto escalar se anula porque

$$A \bullet B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos 90° = 0$$



Si los vectores tiene igual dirección y sentido, el producto escalar es

$$A \bullet B \quad A.B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos 0° = |A| \,.\, |B|$$



Si los vectores tienen igual dirección pero sentidos opuestos, $A \bullet B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos 180° = -|A| \,.\, |B|$

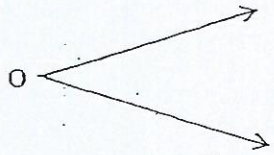
ANEXO TRIGONOMETRIA

La Trigonometría es una parte de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Estas son de mucha utilidad para resolver problemas en diversas ramas de esta ciencia o de otras, como la física, la química, la astronomía, etc.

La *trigonometría* (etimológicamente "medición de ángulos") fue inventada por los astrónomos griegos para calcular los elementos de un triángulo (sus ángulos y lados).

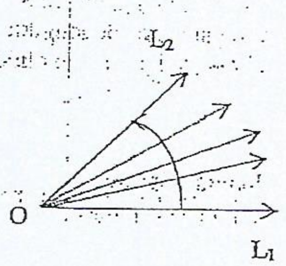
1 Sistemas de Medición de Ángulos

Para la medición de ángulos se tienen en cuenta diversos "sistemas".
Primeramente, es necesario realizar una revisión del concepto de ángulo.



Definición 1

Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas (lados del ángulo), que tienen un origen en común, denominado vértice (O).



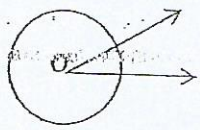
Definición 2

Dadas dos semirrectas L_1 y L_2, con origen común, **ángulo** es la porción del plano generada por el "barrido" (giro) de L_1 hasta coincidir con L_2.

Así pueden darse dos posibilidades: cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario) se considera "ángulo positivo" y cuando se gira a favor de las agujas del reloj (horario) se considera "ángulo negativo".

En particular,

Si el origen de las semirrectas coincide con el centro de un círculo (de radio r), las semirrectas determinan un "ángulo central" del círculo.



La **medida** o medición de un ángulo consiste en asociar a todo ángulo del plano un número que caracteriza su abertura (la parte del plano comprendida en el interior del ángulo). Para medir un ángulo se pueden utilizar unidades de distintos sistemas de medición.

Intentar lo siguiente

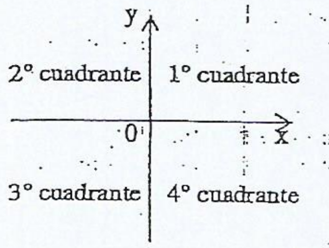
1. Calcular en radianes los siguientes ángulos particulares: 0°, 45°, 90°, 270° y 360°.
2. ¿Cuántos grados mide un ángulo de 1 radián?
3. ¿Cuántos radianes mide un ángulo de 1 grado?
4. Si se toma a π como 3,14 ¿qué valor en radianes se obtiene?

1.4 Sistema Cartesiano Ortogonal

Anteriormente, se ha representado al conjunto de los números reales en una recta. Si se consideran dos rectas (de números reales) que se intersecan perpendicularmente en un punto O, estas constituyen los ejes del **sistema cartesiano ortogonal**, el cual sirve como referencia para establecer las coordenadas de puntos del plano.

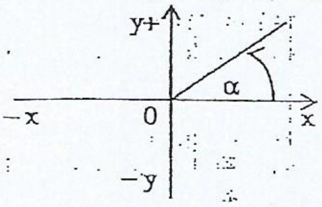
Los ejes **coordenados** (generalmente denominados **"eje x"** o **eje de abscisas** y **"eje y"** o **eje de ordenadas**) dividen al plano en cuatro sectores llamados **cuadrantes**. Cada punto del plano queda asociado a un par ordenado (x; y) de números reales, determinando:

el primer cuadrante: $a \in \Re^+ \wedge b \in \Re^+$.
el segundo cuadrante: $a \in \Re^- \wedge b \in \Re^+$.
el tercer cuadrante: $a \in \Re^- \wedge b \in \Re^-$.
el cuarto cuadrante: $a \in \Re^+ \wedge b \in \Re^-$



Entonces, como un **ángulo** es invariante respecto de su posición en el plano y con el único motivo de facilitar definiciones, propiedades y cálculos, es conveniente referirlo a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

Un ángulo se encuentra en posición normal si su vértice se ubica en el origen de coordenadas O y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas.



De esta forma al primer cuadrante le corresponden ángulos desde 0° hasta 90° (tomados en sentido antihorario), el segundo cuadrante desde 90° hasta 180°, el tercer cuadrante desde 180° hasta 270° y el cuarto cuadrante desde 270° hasta 360°.

Al seguir girando en ese sentido se obtienen ángulos mayores a 360°; por ejemplo un ángulo de 1125° serán 3 giros y 1/4 y estará en el primer cuadrante, un ángulo de −120° tendrá sentido horario y estará en el tercer cuadrante.

¿Son Verdaderas o Falsas estas proposiciones?

1. un ángulo de 300° está en el cuarto cuadrante
2. un ángulo de 120° está en el primer cuadrante
3. un ángulo de 1500° está en el cuarto cuadrante

El Sistema Sexagesimal

> ¿Cuántos grados sexagesimales mide:
> a) un ángulo llano?
> b) un ángulo recto?
> c) un ángulo de giro?

Este sistema tiene como unidad de medida al Grado Sexagesimal. Símbolo: (°).

> **Definición**
> Un grado sexagesimal es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo (ángulo central), de amplitud igual a la 360 avas parte del mismo.

Si se divide un grado en 60 partes se obtiene un minuto (′) y si se divide un minuto en 60 partes se obtiene un segundo (″). Más allá, se utilizan divisiones decimales del segundo (0,1″; 0,01″; etc.).

El Sistema Circular

En este sistema la unidad de medida es el **radián** y se indica "rad".

Si se considera una circunferencia de radio r y centro O, y se genera un ángulo central α por la rotación de la semirrecta OX, se obtiene sobre la circunferencia un arco AB de longitud L. Al efectuar la razón entre la longitud (L) del arco determinado y el radio de longitud r, se obtiene un valor adimensional L/r que es la medida del ángulo en radianes.

> **Definición**
> Un **radián** es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo de radio r, cuyos lados determinan sobre la circunferencia un arco AB de longitud igual al radio.

$$\frac{\text{longitud del arco}}{\text{longitud del radio}} = \alpha \text{ rad}$$

Equivalencia entre el Sistema Sexagesimal y el Circular

Se puede establecer una equivalencia entre estos sistemas, considerando el cociente (en radianes) entre la longitud de una semicircunferencia de perímetro (π radio) y el radio. Este sector circular corresponde a un ángulo llano que mide 180 ° (sexagesimales), por lo que se obtiene la relación:

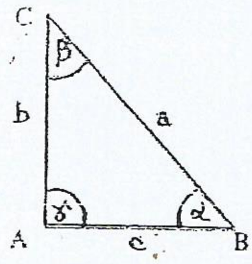
$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

En general, si $\alpha°$ es un ángulo en el sistema sexagesimal y α_r es un ángulo en radianes, se tienen las siguientes expresiones:

$$\alpha° = \frac{180}{\pi} . \alpha_r$$
$$\alpha_r = \frac{\pi}{180} . \alpha°$$

> Una milla marítima se define como la longitud del arco subtendido en la superficie de la Tierra por un ángulo que mide 1 minuto. El diámetro de la Tierra es aproximadamente 7.927 millas (terrestres). Determinar la cantidad de millas (terrestres) que hay en una milla marítima.

Relaciones Trigonométricas de un Ángulo



a) Sea un triángulo rectángulo ABC (con el ángulo recto en A).
Las medidas de sus lados son a, b y c. Sus ángulos interiores son α, β y el ángulo recto γ.
El lado b se denomina **cateto opuesto** al ángulo α.
El lado c se denomina **cateto adyacente** al ángulo α.
El lado a se denomina **hipotenusa** del triángulo.

Se pueden encontrar las razones entre los catetos y la hipotenusa respecto a un determinado ángulo, (por ejemplo α). Los valores que se obtienen son números reales que dependerán del valor del ángulo α. Estas razones se conocen como relaciones trigonométricas y son seis:

el seno del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y la **hipotenusa**.

$$\boxed{sen\ \alpha = \frac{b}{a}}$$

el coseno del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y la **hipotenusa**.

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{c}{a}}$$

la tangente del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y el **cateto adyacente** *a* α.

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{b}{c}}$$

la cotangente del ángulo α:
es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y el **cateto opuesto** *a* α.

$$\boxed{ctg\ \alpha = \frac{c}{b}}$$

la secante del ángulo α:
es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto adyacente** *a* α.

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{a}{c}}$$

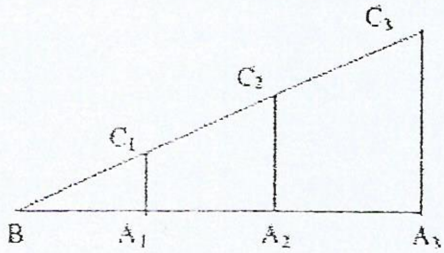
la cosecante del ángulo α:
es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto opuesto** *a* α.

$$\boxed{cosec\ \alpha = \frac{a}{b}}$$

Las tres primeras se denominan **relaciones trigonométricas directas**. Las tres últimas son las **relaciones trigonométricas recíprocas** de las anteriores. O sea, en símbolos se puede escribir:

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}; \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \qquad ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Si se tienen tres triángulos rectángulos semejantes (como en la figura), rectángulos en A y B = 30°, con BA_1 = 3 cm, BA_2 = 5 cm y BA_3 = 8 cm respectivamente. ¿Qué se puede decir de los cocientes CA/BC en los tres casos?

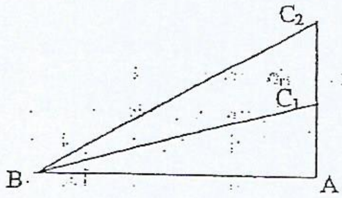


Los cocientes CA/BC corresponden a cateto opuesto al ángulo B dividido la hipotenusa de dicho ángulo, con lo que se estaría calculando el seno del ángulo B. Como se ve, los cocientes son iguales, o sea:

$$sen\,B = sen\,30° = \frac{C_1A_1}{BC_1} = \frac{C_2A_2}{BC_2} = \frac{C_3A_3}{BC_3} = 0{,}5.$$

De igual forma, se obtienen razones iguales, si se calculan las demás razones trigonométricas mencionadas anteriormente.

Si se tienen dos triángulos rectángulos (como en la figura), rectángulos en A, con $B_1 = 30°$ y $B_2 = 45°$. ¿Qué se puede decir de los cocientes CA/CB en los dos casos?



En el primer caso, se ha calculado sen 30° = 1/2, y en el segundo caso sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusiones

Los valores de las razones trigonométricas dependen del valor del ángulo considerado.

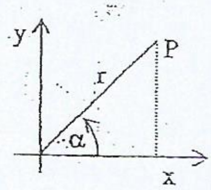
Para un mismo ángulo, las razones trigonométricas se mantienen, independientemente de la longitud de los lados del triángulo.

Valores de seno y coseno para algunos ángulos más utilizados, del primer cuadrante.

	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

b) Sea α un ángulo de posición normal y P(x, y) un punto sobre el lado terminal del ángulo.

Se forma un triángulo rectángulo que tiene:
como cateto opuesto a y, como cateto adyacente a x,
y como hipotenusa a r.



Por el teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Por lo tanto: $sen\,\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$

Relación Fundamental de la Trigonometría

Sea α un ángulo cualquiera en posición normal y sea P(x, y) un punto sobre el lado terminal del ángulo.
Por definición:

$$sen\,\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad [1]$$

Relación fundamental
$sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Por el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = r^2$

Dividiendo por r^2: $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \left(\frac{r}{r}\right)^2$

Reemplazando por [1]: $(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

2.3 Relaciones Trigonométricas Inversas

Si se conoce el valor de la relación trigonométrica ¿es posible conocer el valor del ángulo correspondiente? O sea, si se sabe que $sen\,\alpha = 0{,}5$ entonces ¿se puede saber cuánto vale α?

La respuesta es afirmativa: se utilizan las relaciones inversas. Cada relación trigonométrica tiene su inversa. En el ejemplo: $\alpha = arc\ sen\ 0{,}5$. Si se hace la pregunta ¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5?. La respuesta es 30°. Entonces: arc sen 0,5 = 30°.

En general:

Si $sen\,\alpha = b \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ b$
Si $\cos\alpha = b \Rightarrow \alpha = arc\ cos\ b$
Si $tg\,\alpha = b \Rightarrow \alpha = arc\ tg\ b$

En la calculadora o en algunos textos se utiliza el símbolo: $\alpha = sen^{-1}\,b$.

Ejemplo: Si $sen\,\alpha = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ \sqrt{2}/2 = \pi/4$.

Intentar lo siguiente

Hallar: 1) arc cos (-0,8)   2) arctg 2   3) arc sec 4

Relación entre los valores de las Funciones Trigonométricas de un Mismo Ángulo

Entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo existe una serie de relaciones, algunas de las cuales veremos a continuación.

a) $sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ b) $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ c) $ctg\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$

d) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ e) $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$ f) $tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\,\alpha}$

g) $tg^2\,\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

Intentar lo siguiente

Aplicando las relaciones anteriores, calcular todas las funciones de "α", sabiendo que:

a) $sen\,\alpha = 0.70$; 2° cuadrante   b) $tg\,\alpha = -2$; 4° cuadrante