

FRENTE
ESTUDIANTIL

Cartilla de Teoría



Elaborado por la comisión Académica
de Ingreso (Res RCD N°638/11)

UNIDAD I

Números Reales

CONJUNTOS

Definición: Un *conjunto* es una colección bien definida de objetos. Denotaremos los conjuntos con letras mayúsculas A, B, C , etc. Los objetos que componen el conjunto reciben el nombre de *elementos* o *miembros* del conjunto y los denotaremos por letras minúsculas a, b, c , etc.

Nota: Existen dos formas de escribir un conjunto:

- Por **extensión** por la que podemos determinar el conjunto listando todos sus elementos.
- Por **comprensión** por la que podemos determinar un conjunto, identificando sus elementos mediante una propiedad común de ellos.

Para escribir un conjunto por extensión, listamos todos sus elementos separados por comas, y finalmente, encerrados entre llaves. Por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$.

Para escribir un conjunto por comprensión elegimos un elemento arbitrario x y señalamos que cumple una determinada propiedad $P(x)$. Finalmente, encerramos toda la expresión entre llaves: $A = \{x: P(x)\}$, se lee " A es el conjunto de todos los elementos x tales que cumplen la propiedad $P(x)$ ". (Nota ":", es una manera simbólica de escribir *tal que*").

Ejemplos:

1. El conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ está expresado por extensión. Si deseamos expresar el conjunto A por comprensión debemos buscar una propiedad ó característica en común que contengan cada uno de sus elementos, en este caso sabemos que los elementos son vocales, por lo tanto el conjunto A se puede expresar por comprensión como sigue:

$$A = \{x: x \text{ es una vocal}\}.$$

2. Sea $B = \{x: x \text{ es un número entero positivo menor que cinco}\}$, este conjunto está expresado por comprensión, para expresar B por extensión debemos determinar el conjunto listando todos sus elementos, es decir $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Conjunto Vacío

Dado el conjunto C , $C = \{x: x \text{ es un profesor de matemática con más de trescientos años de edad}\}$ expresado por comprensión, se desea expresar el conjunto por extensión, entonces debemos encontrar todos los elementos del conjunto; es evidente que C carece de elementos, debido a que no existe actualmente un profesor con dicha característica. Por lo tanto, C es un conjunto que carece de elementos, el cual es llamado conjunto vacío. **El conjunto vacío se denota por $\{\}$ o \square .**

Por lo que $C = \{\}$ ó $C = \square$.

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal** (U). Por ejemplo si trabajamos en el conjunto de números reales, denotado por \mathbb{R} , el universo son todos los números.

Conjunto Unitario

Un conjunto unitario es aquel que está formado por un solo elemento. *Por ejemplo*

$$A = \{a\} = \{x / x=a\}$$

Igualdad de Conjuntos

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para denotar que A y B son iguales, escribimos: **A = B**

Inclusión de conjuntos

Si cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Se dice también que **A está contenido en B** o que **B contiene a A**. La relación de subconjunto viene dada por: $A \subset B$

Ejemplo:

Consideremos los siguientes conjuntos $A = \{1,3,4,5,8,9\}$, $B = \{1,2,3,5,7\}$ y $C = \{1,5\}$. Podemos observar que todos los elementos del conjunto C están en el conjunto A, por tanto $C \subset A$. De la misma manera podemos observar que $C \subset B$. Sin embargo, no todos los elementos del conjunto B están en A, por lo que podemos decir que **B no está incluido en A**.

Propiedades: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera se cumple siempre:

1. $\emptyset \subset A \subset U$ (el conjunto vacío está contenido en el conjunto A)
2. $A \subset A$ (cualquier conjunto está incluido en sí mismo)
3. Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
4. $A = B$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

Operaciones entre Conjuntos

Cuando trabajamos con ecuaciones, problemas, etc. podemos llegar a encontrarnos con distintas situaciones al querer determinar las soluciones de los mismos, es por ello, que a continuación se definirá las operaciones entre conjuntos, las cuales constituyen una herramienta necesaria en la resolución de diferentes ejercicios matemáticos.

Unión de Conjuntos

Ejemplo: Juan, José, Luis, Mario, Alfredo, Rubén, Roberto, Bruno, Adrián, Fernando, Daniel y Andrés estudian en el mismo grupo. De ellos, Juan, Luis, Mario, Rubén y Roberto practican natación. José, Mario, Alfredo, Roberto, Bruno y Andrés juegan fútbol. ¿Cuáles estudiantes practican algún deporte?

Solución:

Llamamos A al conjunto de los estudiantes que nadan, es decir:

$A = \{\text{Juan, Luis, Mario, Rubén, Roberto}\}$ y B al conjunto de los estudiantes que juegan fútbol:

$B = \{\text{José, Mario, Alfredo, Roberto, Bruno, Andrés}\}$

Ahora formamos la colección de estudiantes que practican algún deporte:

$\{\text{Juan, Luis, Mario, Rubén, Roberto, José, Alfredo, Bruno, Andrés}\}$.

Los elementos de este conjunto son los estudiantes que practican algún deporte. Notar que a Mario y a Roberto no lo colocamos dos veces en el conjunto, por más que practiquen dos deportes a la vez.

Cuando deseamos, como en el problema anterior reunir los elementos de dos conjuntos A y B , escribimos:

$$C = A \cup B$$

En este caso decimos que C es la *unión de los conjuntos A y B* , y para describir sus elementos:

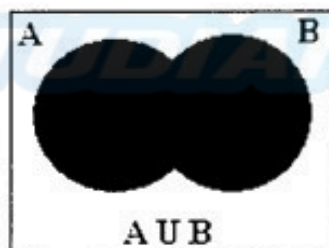
$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Y se lee A unión B es el conjunto de elementos x tales que x pertenece a alguno de los dos conjuntos, es decir, x pertenece a A o x pertenece a B .

Notemos que en la unión se encuentran todos los elementos de A y todos los elementos de B . Es decir:

$$A \subset A \cup B \text{ y } B \subset A \cup B$$

Gráficamente se representa:



Observaciones:

- Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$.
- Si $A = B$ entonces $A \cup B = A = B$.
- Si $x \in A \cup B$ entonces x pertenece a A , x pertenece a B o x pertenece a ambos.

Ejemplo: Si $A = \{3,4,5,6\}$ y $B = \{3,6\}$, encontrar $A \cup B$.

Solución: Como todos los elementos de B pertenecen al conjunto A ($B \subset A$) entonces la unión será el conjunto A .

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Propiedades de la Unión: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera se verifica que:

1. Idempotencia: $A \cup A = A$
2. Asociatividad: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$
4. Elemento neutro: $A \cup \Phi = \Phi \cup A = A$

Intersección de Conjuntos

Ejemplo: Los miembros del Consejo de Seguridad de la ONU durante 1997 fueron Japón, Kenia, Polonia, Portugal, República de Corea, Federación Rusa, Suecia, Reino Unido, Estados Unidos de Norteamérica, Chile, China, Costa Rica, Egipto, Francia y Guinea-Bissau.

De ellos Federación Rusa, Reino Unido, Estados Unidos de Norteamérica, China y Francia son miembros permanentes. Por otra parte, Portugal, Chile, Costa Rica, Francia y Guinea-Bissau tienen por idioma oficial una lengua romance. ¿Qué países son miembros permanentes y tienen una lengua romance por idioma?

Solución:

Llamamos A al conjunto de miembros permanentes del Consejo de Seguridad de la ONU, es decir:

$A = \{\text{Federación Rusa, Reino Unido, Estados Unidos de Norteamérica, China, Francia}\}$ y B al conjunto de países cuyo idioma es una lengua romance, o sea:

$B = \{\text{Portugal, Chile, Costa Rica, Francia, Guinea-Bissau}\}$

Los países que son miembros permanentes y cuyo idioma es una lengua romance son los que están en ambos conjuntos, llamemos C a dicho conjunto, entonces:

$C = \{\text{Francia}\}$

Francia es el único país que es miembro permanente y tiene como idioma una lengua romance.

En general, cuando deseamos obtener los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B , escribimos:

$$C = A \cap B,$$

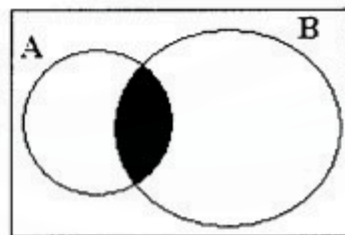
En este caso decimos que C es la *intersección de los conjuntos A y B* , o sea:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Y se lee A intersección B es el conjunto de elementos x tales que x pertenece a A y x pertenece a B .

De acuerdo con la definición, cualquier elemento de $A \cap B$ es un elemento de A y también de B , es decir:

$$(A \cap B) \subset A \text{ y } (A \cap B) \subset B.$$



$A \cap B$

Cuando no hay elementos que pertenezcan a ambos conjuntos A y B , decimos que la intersección es vacía o que el conjunto obtenido es el *conjunto vacío*.

Observaciones:

- Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$.
- Si $A = B$ entonces $A \cap B = A = B$.

Propiedades de la Intersección. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera se cumple que:

1. Idempotencia: $A \cap A = A$
2. Asociatividad: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$
4. Elemento neutro: $A \cap U = U \cap A = A$

Conjunto de los Números Naturales (N)

Los números que se emplean para contar, 1, 2, 3, 4,... constituyen el conjunto de los Números Naturales (o enteros positivos). Lo simbolizamos con N y podemos escribirlo como:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Propiedades de N:

1. El conjunto N es infinito
2. Tiene primer elemento (el 1) y no tiene último elemento
3. Todo número natural tiene un sucesor:
 $\forall n \in N, \exists n+1 \in N$, donde $n+1$ es el sucesor de n
4. Todo número natural tiene un antecesor excepto el 1:
 $\forall n \in N \wedge n \neq 1 \exists n-1 \in N$, donde $n-1$ es el antecesor de n
5. Entre dos números naturales hay un número finito de números naturales. Se dice que N es discreto

Nota: En este conjunto la suma de dos números naturales da como resultado otro natural (Ley de cierre para la suma), pero no ocurre lo mismo para la diferencia (no vale la ley de cierre), por ejemplo $3 - 5$ no tiene solución en este conjunto, por lo tanto ecuaciones del tipo $5 + x = 3$ no tienen solución en el conjunto N, de allí la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números.

Conjunto de los Números Enteros (Z)

Si al conjunto N se agrega el número 0 y los enteros negativos se obtiene un nuevo conjunto llamado Enteros. Lo simbolizamos con Z.

$$Z = \{\dots - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$Z = N \cup \{0\} \cup Z^{-}$$

Propiedades de Z:

1. El conjunto Z es infinito
2. El conjunto Z no tiene ni primero ni último elemento
3. Todo número entero tiene un antecesor y un sucesor
4. Entre dos números enteros hay un número finito de números enteros. Se dice que Z es discreto

Nota: La suma y diferencia de dos números enteros es otro entero (valen las leyes de cierre para suma, diferencia y producto) pero no ocurre lo mismo con la división de dos números enteros, por ejemplo $2:5$ no tiene solución en este conjunto (no vale la ley de cierre para la división), por lo tanto ecuaciones del tipo $4x + 1 = 6$ no tienen solución en Z, de allí la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números.

Regla Toda expresión decimal periódica pura se puede transformar en una fracción tal que:

- El numerador se obtiene restando al número sin la coma la parte entera.
- El denominador se obtiene colocando tantos 9 como cifras periódicas tenga.

Ejemplo:

$$2,\overline{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

$$4,\overline{36} = \frac{436 - 4}{99} = \frac{432}{99}$$

Regla Toda expresión decimal periódica mixta se puede transformar en una fracción tal que:

- El numerador se obtiene restando al número decimal sin la coma la parte entera seguida de la parte no periódica.
- El denominador se obtiene con tantos nueves como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejemplos:

$$3,5\overline{4} = \frac{354 - 35}{90} = \frac{319}{90}$$

$$4,136\overline{78} = \frac{413678 - 4136}{99000} = \frac{409542}{99000}$$

Fracciones Equivalentes: Dos fracciones son equivalentes cuando representan el mismo número, por ejemplo $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{5}{20}$ son equivalentes porque todas representan el número 0,25.

Para pasar de la primera a la segunda se multiplica numerador y denominador por 2, o por el contrario si se quiere reducir la segunda fracción a la primera se divide numerador y denominador por 2.

Operaciones en Q:

Suma o Resta: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d}$

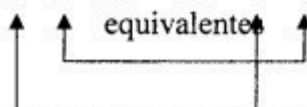
Ejemplos:

a) Fracciones de igual denominador: se pone el mismo denominador y se suman o restan numeradores.

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

b) Fracciones de distinto denominador: se obtienen fracciones equivalentes de igual denominador antes de sumar o restar

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3.3}{2.3} - \frac{5.2}{3.2} = \frac{9}{6} - \frac{10}{6} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3.3 - 2.5}{2.3} = \frac{9 - 10}{6} = -\frac{1}{6}$$



Producto: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Es conveniente simplificar las fracciones a su mínima expresión y recién realizar el producto. La simplificación se hace entre numerador y denominador

Ejemplos: $\frac{1}{3_1} \times \frac{6^2}{5_1} \times \frac{5^1}{7} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{1.2.1}{1.1.7} = \frac{2}{7}$

$$\frac{5^1}{25_5} \times \frac{3}{4_1} \times \frac{8^2}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{1.3.2}{5.1.5} = \frac{6}{25}$$

Cociente: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

En este caso la simplificación se hace entre numeradores o bien entre denominadores.

Ejemplos: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2^1}{3} : \frac{4^2}{5} = \frac{1.5}{3.2} = \frac{5}{6}$

$$\frac{8^2}{9_3} : \frac{4^1}{3_1} : \frac{15^3}{3_1} = \frac{2}{3} : \frac{1}{1} : \frac{5}{1} = \frac{2.1.5}{3.1.1} = \frac{10}{3}$$

Nota: El conjunto de los números racionales no es cerrado para la radicación, por ejemplo $\sqrt{2} = 1,414213..$ no es un número racional porque es un número decimal no periódico, no se puede expresar como una fracción, por lo tanto ecuaciones del tipo $x^2 - 2 = 0$ no tienen solución en Q. De allí la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números.

Conjunto de los Números Irracionales (I)

Es el conjunto formado por los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Lo simbolizamos con I.

Ejemplos:

$$\sqrt{2} = 1,414213.....$$

$$\pi = 3,14...$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508...$$

Propiedades de I:

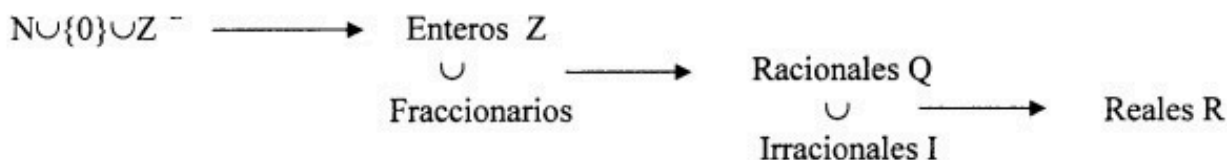
1. I es infinito
2. El conjunto I no tiene ni primero ni último elemento
3. Entre dos números irracionales existen infinitos números irracionales, entonces se dice que I es denso.

Conjunto de los Números Reales (R)

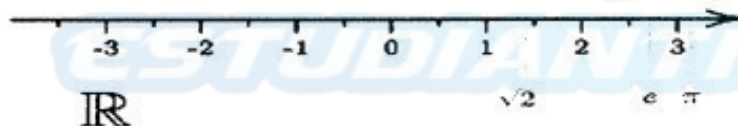
Es el conjunto formado por la unión de los racionales y los irracionales:

$$R = Q \cup I$$

Resumiendo:



Representación Gráfica de R: Los números reales se pueden representar sobre una recta, llamada recta real, de modo que a todo número real le corresponde un punto de la recta y a todo punto de la recta le corresponde un número real.



Ley de Tricotomía: Llamamos P al conjunto de números reales mayores que cero:

$$P = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}.$$

Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y un conjunto P llamado positivo, tal que $P \subset \mathbb{R}$ y P cerrado para la suma y el producto, es válida solo una de las proposiciones siguientes:

$$\text{i) } a \in P \quad \text{ii) } a = 0 \quad \text{iii) } -a \in P$$

Orden en R: Si a y $b \in \mathbb{R}$, a es menor que b si se cumple que $b - a$ es positivo.

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$$

Operaciones en R. Propiedades

Las operaciones binarias usuales en R son la adición, producto, diferencia y división

Propiedades de la Adición (Suma): Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Ley de Cierre: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a+b \in \mathbb{R}$
2. Ley Conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a+b = b+a$
3. Ley Asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a+(b+c) = (a+b)+c$
4. Existencia del elemento neutro para la suma:
 $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R}; a+0 = 0+a = a$
5. Existencia del elemento opuesto (inverso aditivo)
 $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}; a+(-a) = (-a)+a = 0$

Propiedades del Producto: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Ley de Cierre: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot b \in \mathbb{R}$
2. Ley Conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$
3. Ley Asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Existencia del elemento neutro para el producto:
 $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R}; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Existencia del elemento inverso
 $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{R}; a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
6. Distributiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Todo conjunto que cumple con las propiedades anteriores se denomina "Campo", por lo tanto el conjunto de los Reales con las operaciones de suma y producto usuales constituye un campo numérico. Otros campos numéricos son los Racionales y los Complejos.

Observación: Si el producto de dos números reales es cero entonces uno de los dos números es cero.

$$a, b \in \mathbb{R}, \text{ si } a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Reglas para la resolución de ejercicios:

• **Reglas de Supresión de Paréntesis:**

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

• **Regla de los Signos para el Producto y la División:**

$$+, + = + \qquad + \div + = +$$

$$+, - = - \qquad + \div - = -$$

$$-, + = - \qquad - \div + = -$$

$$-, - = + \qquad - \div - = +$$

• **Leyes Cancelativas y Uniformes:**

1) De la Adición: $a + b = c + b \Rightarrow a = c$ (cancelativa)

$$a = c \Rightarrow a + b = c + b \text{ (uniforme)}$$

2) Del Producto: $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b, c \neq 0$ (cancelativa)

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c \text{ (uniforme)}$$

• **Potencia en \mathbb{R}**

Sean $a \in \mathbb{R}$, n entero positivo, definimos $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = c$
| n veces |

a: base de la potencia $\in \mathfrak{R}$

n: exponente $\in \mathbb{Z}$

c : se denomina potencia $\in \mathfrak{R}$

$$\text{Si } a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{Ejemplo: } (4)^{-7} = \frac{1}{4^7}$$

Propiedades de la Potencia

1. Producto de potencias de igual base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Ejemplo: $2^3 \cdot 2^5 = 2^7$

2. Cociente de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$ si $a \neq 0$
Ejemplo: $2^9 : 2^5 = 2^4$

3. Potencia de potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ Ejemplo: $(2^9)^5 = 2^{45}$

4. Distributiva de la potencia respecto del producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Ejemplo: $(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$

5. Distributiva de la potencia respecto del cociente: $(a : b)^n = a^n : b^n$ si $b \neq 0$

Ejemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{3^7}{5^7}$

Observación

La potenciación **no es distributiva** respecto a la **suma o la diferencia**. Es decir

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

• Radicación en \mathbb{R}

La raíz enésima de un número real "a" es otro número "b" cuya potencia enésima es "a".

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \quad n \in \mathbb{N}$$

a: se denomina radicando

n: se denomina índice del radical

- Si $a > 0 \wedge n$ es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > 0$ (resultado positivo). Ej: $\sqrt[4]{16} = 2$
- Si $a < 0 \wedge n$ es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a} \Rightarrow \emptyset$ (no existe solución real) Ej: $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
- Si $a > 0 \wedge n$ es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > 0$ (resultado positivo) Ej: $\sqrt[3]{8} = 2$
- Si $a < 0 \wedge n$ es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a} < 0$ (resultado negativo) Ej: $\sqrt[5]{-32} = -2$
- La radicación puede expresarse como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Propiedades de la Radicación:

1. Raíz de un producto es igual al producto de sus raíces: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. Raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. Raíz de raíz es igual a la raíz del número cuyo índice es el producto de los índices dados:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \text{o} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$$

Ej: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[6]{a}$

4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{o} \quad \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

La radicación **no es distributiva** respecto a la **suma o la diferencia**. Es decir:

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

¡Cuidado al simplificar!

Si tenemos una potencia, como radicando en una raíz de índice par, podemos escribir:

$\sqrt{(-2)^2} = (-2)^{2/2} = -2$ que es equivalente a simplificar índice con exponente y esto **no es correcto** porque si operamos sin simplificar, el resultado obtenido es **2 (positivo)**

• Operaciones con Radicales:

1. Extracción de Factores fuera del Radical: Para extraer un factor fuera del radical se divide el exponente del factor por el índice, el resultado es el exponente del factor fuera del radical y el resto de la división es el exponente del factor que queda dentro del radical.

Ejemplo: $\sqrt[3]{p^{10} \cdot q^9} = q^3 \cdot p^3 \sqrt[3]{p}$

$$\sqrt[5]{a^{16} \cdot b^3} = a^3 \sqrt[5]{a \cdot b^3}$$

Nota: Si se quiere introducir un factor dentro del radical se realiza el proceso inverso: se multiplica el exponente del factor por el índice, el resultado es el exponente del factor dentro del radical

2. Racionalización de Denominadores: Dada una fracción cuyo denominador sea un radical, racionalizar dicho denominador es transformar la fracción dada en otra equivalente a la primera, en cuyo denominador no figuren radicales.

1º Caso: Cuando figura un solo radical en el denominador, se multiplica y divide por una raíz con el mismo índice, y el exponente del radicando es la diferencia entre el índice y el exponente del radical original.

Ejemplos:
$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt[8]{m^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[8]{m^3}}{\sqrt[8]{m^5} \cdot \sqrt[8]{m^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[8]{m^3}}{\sqrt[8]{m^5 \cdot m^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[8]{m^3}}{\sqrt[8]{m^8}} = \frac{x \cdot \sqrt[8]{m^3}}{m}$$

2º Caso: Cuando se tiene un binomio con radicales en el denominador de la fracción, se multiplica y divide por el binomio conjugado (cambia el signo)

Ejemplos:
$$\frac{5}{\sqrt{3}-a} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3}+a)}{(\sqrt{3}-a) \cdot (\sqrt{3}+a)} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3}+a)}{(\sqrt{3})^2 - a^2} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3}+a)}{3-a^2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot \sqrt{2}}{6-2} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{6} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$$

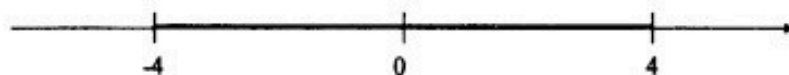
• **Relación de Menor:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

1. En la adición: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. En el producto: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
 $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ (se invierte la desigualdad)
3. En el cociente: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
 $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (se invierte la desigualdad)

• **Valor Absoluto:** Se define valor absoluto de un número real a :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: $|4| = 4$ y $|-4| = 4$



- **Propiedades del Valor Absoluto:**

$$1) |a| \geq 0$$

$$2) |a| = |-a|$$

$$3) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$4) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$5) |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$6) |a - b| \geq |a| - |b|$$

$$7) |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a; a > 0$$

$$8) |x| \geq a \Rightarrow x \leq -a \vee x \geq a; a > 0$$

- **Intervalos Reales:** Un intervalo real es un subconjunto de \mathbb{R} y se representa como un segmento de la recta real.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$, se define:

- **Intervalo Cerrado $[a, b]$:**

$$[a, b] = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$$



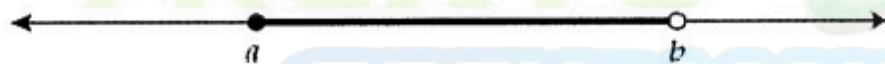
- **Intervalo Abierto (a, b) :**

$$(a, b) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$



- **Intervalo Semiabierto o Semicerrados:**

$$[a, b) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$$

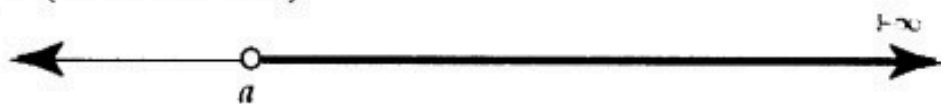


$$(a, b] = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$$



- Intervalos sin Cota Inferior o Superior

$$(a, \infty) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$$



$$[a, \infty) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$$



$$(-\infty, a] = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$$



UNIDAD II

Expresiones Algebraicas. Polinomios

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama **expresión algebraica** a todo conjunto de términos representados por letras y números, relacionados entre sí por medio de las siguientes operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

$$a) x^2 + 2xy$$

$$b) \sqrt{2x} + y^2x^3$$

$$c) \frac{x \cdot y - 2x}{x^2 + 1}$$

$$d) \frac{2}{3}x + a(\sqrt{3} - 1)^2$$

Expresiones Algebraicas Enteras: Se llaman así a las expresiones algebraicas en que las letras están sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta y multiplicación (incluye la potencia con exponente natural).

Ejemplo: $x^3 - 2x + y^4$

Expresiones Algebraicas Racionales o Fraccionarias: Son las expresiones algebraicas que involucran la operación de la división.

Ejemplos: $\frac{3-x}{x^2-1}$; $\frac{r}{2p-t}$

Monomio: Es la expresión algebraica entera en la que no intervienen ni la suma ni la resta.

Ejemplo: $2x^2y^4$

El número que multiplica a las letras se llama “coeficiente numérico” y las letras se llaman “parte literal”

Monomios Semejantes: Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Ejemplo: $6x^2y^4$ es semejante con $2x^2y^4$

Grado de un Monomio: Es la suma de los exponentes de la parte literal.

Ejemplo: $8x^4y^3$ tiene grado 7

Suma de Monomios

Es inmediato sumar o restar monomios semejantes:

$$2x^2 + 4x^2 = (2 + 4)x^2 = 6x^2$$

$$7x^4 - 3x^4 = (7 - 3)x^4 = 4x^4$$

La suma de monomios no semejantes, por ejemplo: $5x + 3x^2$ nunca es otro monomio, considerando este caso particular, la suma nos da un binomio.

Nota: Un *binomio* es la suma de dos monomios no semejantes, un trinomio, de tres y en general, un *polinomio* es la suma algebraica de un número finito de monomios no semejantes (en particular, un monomio también es un polinomio).

Multiplicación de Monomios:

El producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo signo resulta de aplicar la regla de los signos del producto, cuyo coeficiente numérico es el producto de los coeficientes numéricos de los factores, y cuya parte literal se obtiene escribiendo una sola vez cada una de las letras que figuran en los monomios dados, con un exponente igual a la suma de todos los exponentes con que dicha letra figura en los factores.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}a^2m\right)(-5ab^3)\left(-\frac{1}{10}xm^3\right) = \frac{2}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot a^{2+1} \cdot m^{1+3} \cdot b^3 \cdot x =$$

Respuesta:

$$\frac{1}{5}a^3 \cdot b^3 \cdot x \cdot m^4$$

División de dos Monomios: El resultado es otro monomio cuyo signo resulta de aplicar la regla de los signos de la división, cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes de los monomios y cuya parte literal se obtiene escribiendo una vez todas las letras que figuren en los monomios dados, con un exponente igual a la diferencia entre el exponente de la letra del dividendo y el que tiene la misma en el divisor.

Ejemplo:

$$\left(-12x^9z^2\right) \div \left(3x^5z\right) = -4x^{9-5}z^{2-1} = -4x^4z$$

Respuesta:

$$-4x^4z$$

POLINOMIO

Polinomio: Es la suma algebraica de monomios, llamados términos del polinomio.

Un polinomio con dos términos se llama binomio

Un polinomio con tres términos se llama trinomio

Un polinomio con cuatro términos se llama cuádrinomio

Grado de un Polinomio: El grado del polinomio es igual al del término de mayor grado

Ejemplo: El siguiente polinomio es de grado 13

$$8x^2y^5 - 3xyz + 2x^4y^8z$$

“Un polinomio de grado cero es una constante no nula”. Por lo tanto cualquier número real distinto de cero se puede considerar como un polinomio de grado cero.

Polinomio Nulo: Se llama así al polinomio que tiene todos los coeficientes numéricos nulos y se dice que carece de grado.

Polinomio Homogéneo: Es aquel polinomio que tiene todos los términos de igual grado.

Ejemplo: $2x^3y + 4x^2y^2 - 5z^3x$

Polinomios Ordenados: Un polinomio se dice ordenado con respecto a las potencias decrecientes de una de sus letras, cuando esta figura en cada término elevada a una potencia menor o igual que en el término anterior.

Ejemplo: $3a^5z - 2a^3 + \frac{1}{3}a^3z^5 - 2a$ está ordenado con respecto a las potencias decrecientes de a .

Nota: Puede ordenarse el polinomio en forma creciente con respecto a una de sus letras.

Ejemplo: $-2a + \frac{1}{3}a^3z^5 - 2a^3 + 3a^5z$ está ordenado con respecto a las potencias crecientes de a .

Polinomio Completo: Un polinomio en x (o en una indeterminada cualquiera) se dice completo cuando figuran todas las potencias menores de esa letra que la de más alto grado con que esa letra figura en el polinomio. En caso contrario el polinomio se dice incompleto.

Ejemplos: $3x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x - 8$ (incompleto en x porque falta x^4)

$6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - x + 5$ (completo)

Para “completar” un polinomio se deben agregar los términos que faltan pero con coeficiente numérico “cero” para no alterar el polinomio original.

Ejemplo: Completar el polinomio $5z^4 - 7z$.

$\Rightarrow 5z^4 + 0z^3 + 0z^2 - 7z + 0$ (completo)

Igualdad de Polinomios: Dos polinomios son iguales si todos sus términos son iguales

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1) **Suma de Polinomios:** Se realiza agrupando los términos semejantes y sumando sus coeficientes. El grado del polinomio resultante será igual o menor al mayor grado de los polinomios dados.

Ejemplo: Sumar los polinomios siguientes:

$3y^2 + 7x^3y - 2x^4$, $-6yx^3 + 4y^2 - x^4$, $2y^2 - 3x^3y$

$$\begin{array}{r} 3y^2 + 7x^3y - 2x^4 \\ + 4y^2 - 6x^3y - x^4 \\ 2y^2 - 3x^3y \\ \hline 9y^2 - 2x^3y - 3x^4 \end{array}$$

Respuesta: $9y^2 - 2yx^3 - 3x^4$

2) Diferencia de Polinomios: Se realiza sumando al minuendo el opuesto del sustraendo (el opuesto de un polinomio se obtiene cambiando el signo de todos sus términos).

Ejemplo: Restar $-2x^5 + 5xy - y$ del polinomio $8x^2 - 10xy + y$

$$8x^2 - 10xy + y - (-2x^5 + 5xy - y) = 8x^2 - 10xy + y + 2x^5 - 5xy + y =$$

$$= 10x^2 - 15xy + 2y$$

Respuesta: $10x^2 - 15xy + 2y$

3) Multiplicación de Polinomios:

I) Multiplicación de un Monomio por un Polinomio: Se realiza multiplicando cada término del polinomio por el monomio

Ejemplo: $3x^2y(5zx^2y^2 - 3xy + 8x^3yz) = 15x^4y^3z - 9x^3y^2 + 24x^5zy$

Respuesta: $15x^4y^3z - 9x^3y^2 + 24x^5zy$

II) Multiplicación de dos Polinomios: Se obtiene multiplicando cada término del polinomio por cada término del otro polinomio. O sea que se aplica la propiedad distributiva. El grado del polinomio resultado es igual a la suma de los grados de los polinomios dados.

Ejemplo:

$$\left(2a^2 - 5ab + b^2\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{2+1} - 2a^2b - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{1+1}b + 5ab^{1+1} + \frac{1}{2}b^2a - b^{2+1} =$$

$$a^3 - 2a^2b - \frac{5}{2}a^2b + 5ab^2 + \frac{1}{2}b^2a - b^3 = a^3 - \frac{9}{2}a^2b + \frac{11}{2}ab^2 - b^3$$

Respuesta: $a^3 - \frac{9}{2}a^2b + \frac{11}{2}ab^2 - b^3$

Otra Forma de Multiplicar: Se colocan los polinomios como si fuera producto de dos números y se realiza los productos entre los términos de uno con término del otro, esos resultados se colocan de manera que queden en columnas los términos semejantes para poder sumarlos. En el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 5ab + b^2 \\ \times \frac{1}{2}a - b \\ \hline a^3 - \frac{5}{2}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 \\ + \quad -2a^2b + 5ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - \frac{9}{2}a^2b + \frac{11}{2}ab^2 - b^3 \end{array}$$

4) División de Polinomios:

División de Polinomios: Para efectuar la división de polinomios el grado del dividendo debe ser mayor o igual que el grado del divisor. Deben ordenarse en forma decreciente, y el polinomio dividendo debe estar completo.

Regla: Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer término del cociente. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se lo resta del dividendo, obteniéndose un resto de grado menor que el dividendo. Se repite el procedimiento entre el resto y el divisor hasta llegar a obtener un resto de menor grado que el divisor.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo} \rightarrow \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - x + 5 \quad \left| \quad \frac{1}{2}x^2 - x \quad \rightarrow \text{Divisor} \\ - \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 \right) \quad \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4 \quad \rightarrow \text{Cociente} \\ \hline \quad \quad \quad -x^3 + 4x^2 - x + 5 \\ - \left(-x^3 + 2x^2 \right) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 2x^2 - x + 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad - (2x^2 - 4x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3x + 5 \quad \rightarrow \text{Resto} \end{array}$$

Polinomios en una Variable: Un polinomio de grado “n” en una variable (o indeterminada) “x” se expresa:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

donde n es entero no negativo y los coeficientes a_i pertenecen a un campo numérico (en nuestro caso R) y se lee “P de x”.

Si $a_n \neq 0$, a_n se denomina coeficiente principal. Si $a_n = 1$ diremos que el polinomio es mónico y n es el grado del polinomio.

Si todos los coeficientes del polinomio son ceros, entonces se denomina polinomio nulo el cual no posee grado.

Si $P(x)$ es igual a una constante, el grado es nulo.

- Llamamos $Z[x]$ al conjunto de polinomios cuyos coeficientes son números enteros.

- Llamamos $Q[x]$ al conjunto de polinomios cuyos coeficientes son números racionales.

- Llamamos $R[x]$ al conjunto de polinomios cuyos coeficientes son números reales.

Algoritmo de la División de Polinomios en $R[x]$:

Dados $P(x), Q(x) \in R[x]$, con $Q(x) \neq 0$, existen $C(x)$ y $R(x) \in R[x]$ que verifican:

i) $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

ii) $R(x) = 0 \vee \text{grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$

$$\begin{array}{l} P(x) \\ R(x) \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} Q(x) \\ C(x) \end{array} \quad \text{donde: } \begin{array}{l} - P(x) \text{ es el dividendo} \\ - Q(x) \text{ es el divisor} \\ - C(x) \text{ es el cociente} \\ - R(x) \text{ es el resto} \end{array}$$

Regla de Ruffini: Se aplica en el caso especial de división de un polinomio en x por un binomio de la forma $x \pm a$. El resultado se obtiene mediante una disposición práctica llamada "Regla de Ruffini":

- En la primera fila se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado decrecientemente.
- En la segunda fila se escribe hacia la izquierda el opuesto del número a .
- En la tercera fila se escriben los coeficientes del resultado que se van obteniendo así:
 - El primer coeficiente es igual al primer coeficiente del dividendo
 - El segundo coeficiente se obtiene multiplicando el coeficiente anterior por a (cambiado de signo) y sumando a este producto el coeficiente del segundo término del dividendo, luego se repite este procedimiento para obtener los siguientes coeficientes; el último corresponde al resto de la división y todos los anteriores son los coeficientes del polinomio resultado quien tiene un grado menor que el dividendo.

Ejemplo: $x^5 + 4x^3 + 5x^2 - x + 12 \quad \Bigg| \begin{array}{l} x+2 \\ C(x) \end{array}$

| | | | | | | |
|----|----|---|-----|----|-----|--|
| 1 | 0 | 4 | 5 | -1 | 12 | |
| -2 | -2 | 4 | -16 | 22 | -42 | |
| | 2 | 8 | -11 | 21 | -30 | |

$\Rightarrow C(x) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 11x + 21$
 $R = -30$

Cero o Raíz de un Polinomio:

Se dice que un número "a" es un cero o raíz del polinomio $P(x)$ cuando este se anula para $x = a$.

Ejemplo: $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x - 1$
 $P(1) = 1 - 3 + 2 + 1 - 1 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$

Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

Por ejemplo un polinomio de grado 2 tiene 2 raíces, uno de grado 3 tiene 3 raíces, etc.

Teorema del Resto: El resto $R(x)$ de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio $(x+a)$ es el valor numérico que toma dicho polinomio cuando en él se sustituye x por $-a$.

Demostración: Por algoritmo de la división entre $P(x)$ y $(x+a)$ se tiene:

$$P(x) = (x+a) \cdot C(x) + R$$

Evaluando el polinomio en $-a \rightarrow P(-a) = (-a+a) \cdot C(-a) + R$

$$\Rightarrow \boxed{P(-a) = R}$$

Ejemplo: Calcular el resto de la siguiente división:

$$(4x^3 + 5x^2 - x + 12) \div (x+2) \Rightarrow \text{Resto} = P(-2) = 4(-8) + 5 \cdot 4 - (-2) + 12 \\ \Rightarrow R = 2$$

Nota: - Si el resto de la división es cero, la división es exacta

- Si el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es exacto, se dice que P(x) es divisible por Q(x) y Q(x) es factor de P(x)

Cálculo de los Ceros de un Polinomio

Ceros Enteros: Sea $P(x) \in Z[x]$ el polinomio de la forma:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \text{ con coeficientes enteros y } a_n \neq 0$$

Supongamos que el entero p es un cero del polinomio P(x), es decir:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = 0$$

Despejando a_0 y sacando factor común p:

$a_0 = p(-a_n \cdot p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} - \dots - a_1)$ lo que significa que p divide a a_0 , ya que el paréntesis es un número entero, por lo tanto se puede concluir que:

“Los únicos ceros enteros posibles son los divisores del término independiente”

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, los únicos ceros enteros posibles de este polinomio son los divisores enteros de 2, es decir ± 1 y ± 2

Aplicando Ruffini se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz}$$

$\Rightarrow P(x) = (x + 1)(x^2 + x + 2) \rightarrow 1, 2$ y -2 no son ceros del polinomio porque no verifican el polinomio $(x^2 + x + 2)$, por lo tanto los otros ceros seguro que no son enteros.

Ceros Fraccionarios: Dado un polinomio P(x), si p/q (con p y q primos entre si) es un cero del polinomio necesariamente debe ser p divisor del término independiente y q divisor del coeficiente principal.

Ejemplo: Hallar los ceros enteros y fraccionarios de $P(x) = 12x^4 + 44x^3 + 21x^2 - 11x - 6$

Posibles ceros enteros: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ se verifica por Ruffini hasta que se obtiene resto cero solo con -3

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 12 & 44 & 21 & -11 & -6 \\ -3 & & -36 & -24 & 9 & 6 \\ \hline & 12 & 8 & -3 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$$

Posibles ceros fraccionarios: los divisores del término independiente son $\pm 1, \pm 2$
 divisores del coeficiente principal son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$
 entonces los posibles ceros fraccionarios son: $\pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/4, \pm 1/6, \pm 1/12, \pm 2/3$

Mediante Ruffini se obtiene que:

| | | | | | |
|--------|----|----|----|----|--------------|
| | 12 | 8 | -3 | -2 | |
| $1/2$ | | | 6 | 7 | 2 |
| | 12 | 14 | 4 | 0 | $x_2 = 1/2$ |
| $-1/2$ | | | -6 | -4 | |
| | 12 | 8 | 0 | | $x_3 = -1/2$ |
| $-2/3$ | | | -8 | | |
| | 12 | 0 | | | $x_4 = -2/3$ |

Los ceros buscados son $\{-3, 1/2, -1/2, -2/3\}$

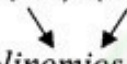
FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Hay números que se pueden factorar; es decir expresar como producto de números primos llamados factores, por ejemplo $15 = 3 \cdot 5$ donde 3 y 5 son los divisores (factores) de 15, o bien se dice que 15 es divisible por 3 y por 5. Algo análogo ocurre con los polinomios. Algunos polinomios se pueden expresar como el producto de otros polinomios primos, por cada uno de los cuales es divisible.

Definición: Factorar un polinomio es transformarlo en un producto de otros polinomios primos, llamados factores.

Cuando un polinomio no se puede factorar se dice que el polinomio es irreducible o primo.

Ejemplo: Factorizar el polinomio $x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$


 Polinomios primos

Un polinomio $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ de grado n tiene n raíces (indicadas por x_i), entonces se puede expresar factorizado como:

$$P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Si algún valor de x_1 se repite k veces se dice que esa raíz es un cero con orden de multiplicidad k . Si no se repite se dice que es un cero simple.

Por ejemplo en el polinomio $P(x) = 3 \cdot (x + 2)^3 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 5)$ el -2 es una raíz de multiplicidad 3, el 1 es raíz de multiplicidad 2 y el -5 es un cero simple.

CASOS DE FACTOREO

1) **Factor Común:** Un número o una expresión algebraica es factor común de todos los términos de un polinomio cuando figura en todos ellos como factor.

Regla: Si en todos los términos de un polinomio figura un factor común, dicho polinomio es igual al producto de ese factor común por el polinomio que resulta al dividir cada término por ese factor.

Ejemplo:

$$4x^3 + 2x^2 - 6x = 2x \cdot \underbrace{(2x^2 + x - 3)}_{\text{cociente}}$$

factor común 2x

Observación: El polinomio que resulta al sacar factor común debe tener igual número de términos que el polinomio dado

2) **Factor Común por Grupos:**

Regla: Si los términos del polinomio pueden reunirse en grupos de igual número de términos, con un factor común en cada grupo, se saca en cada uno de ellos el factor común. Si queda la misma expresión en cada uno de los paréntesis, se lo saca a su vez como factor común, quedando el polinomio como un producto de factores comunes.

Ejemplo: $P(x) = 2.m.x + n^3.x - 2.m.y - n^3.y$

$$P(x) = (2.m.x - 2.m.y) + (n^3.x - n^3.y)$$

$$P(x) = 2.m(x - y) + n^3(x - y) \Rightarrow P(x) = (2.m + n^3)(x - y)$$

Nota: Puede ocurrir que existan factores comunes entre algunos términos pero no en todos.

Ejemplo:

$$P(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 - 2 = (x^6 - 2x^4) + (x^2 - 2) = x^4(x^2 - 2) + (x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^4 + 1)$$

3) **Trinomio Cuadrado Perfecto:**

Definición: Se llama trinomio cuadrado perfecto al trinomio tal que dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

Al trinomio cuadrado perfecto se lo puede escribir como el cuadrado de un binomio formado por la suma o diferencia de sus bases.

$$a^2 + 2.ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2.ab + b^2 = (a - b)^2$$

El Trinomio Cuadrado Perfecto equivale al desarrollo del Cuadrado de un Binomio

Ejemplos:

a) $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + (3)^2 = (2x + 3)^2$

b) $\frac{1}{25}x^6 - \frac{6}{5}x^4y + 9x^2y^2 = \left(\frac{1}{5}x^3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5}x^3\right)(-3xy) + (-3xy)^2 = \left(\frac{1}{5}x^3 - 3xy\right)^2$

4) Cuatrinomio Cubo Perfecto:

Definición: Todo cuatrinomio de la forma $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en el que dos términos son cubos perfectos (a^3 y b^3), otro término es el triplo del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo cubo ($3a^2b$) y el otro término es el triplo del cuadrado de la base del segundo cubo por la base del primer cubo ($3ab^2$) se llama "cuatrinomio cubo perfecto" y se lo puede escribir como el cubo de un binomio, formado por la suma de las bases de los cubos, con sus respectivos signos.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

El Cuatrinomio Cubo Perfecto equivale al desarrollo del Cubo de un Binomio.

Ejemplo: $\frac{1}{8} + 8m^9 + \frac{3}{2}m^3 + 6m^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + (2m^3)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2(2m^3) + 3\cdot\frac{1}{2}(2m^3)^2 = \left(\frac{1}{2} + 2m^3\right)^3$

5º) Diferencia de Cuadrados:

Toda diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de sus bases por la diferencia de sus bases.

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Ejemplos:

1) $x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$

2) $\frac{1}{81}x^6 - 4y^2 = \left(\frac{1}{9}x^3\right)^2 - (2y)^2 = \left(\frac{1}{9}x^3 - 2y\right) \cdot \left(\frac{1}{9}x^3 + 2y\right)$

6º) Suma o Diferencia de Potencias de Igual Grado:

Para factorizar los polinomios de la forma $(x^n \pm a^n)$ se debe recordar que binomios lo dividen exactamente. De esa manera al hacer la división se encuentra el otro factor.

Recordar:

Suma de Potencias de Igual Grado

1. La suma de dos potencias de *igual grado par* no es divisible por la suma de las bases de dichas potencias ni por su diferencia. Consecuencia: Tales binomios no son factorizables.
2. La suma de dos potencias de *igual grado impar* solamente es divisible por la suma de las bases de dichas potencias.

Ejemplo:

$$(a^5 + 2^5) : (a + 2) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16$$

Luego la suma de potencias de igual grado impar quedará factorizada de la siguiente manera:

$$a^5 + 2^5 = (a + 2) \cdot (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)$$

Diferencia de Potencias de Igual Grado

1. La diferencia de potencias de *igual grado par* es divisible tanto por la suma de las bases de dichas potencias como por la diferencia de las mismas.

Ejemplos:

- a) El binomio $a^4 - 3^4$ es divisible por $a + 3$

$$(a^4 - 3^4) : (a + 3) = a^3 - 3a^2 + 9a - 27$$

Luego la diferencia de potencias de igual grado par quedará factorizada de la siguiente manera:

$$a^4 - 3^4 = (a + 3) \cdot (a^3 - 3a^2 + 9a - 27)$$

- b) El binomio $a^4 - 3^4$ es divisible por $a - 3$

$$(a^4 - 3^4) : (a - 3) = a^3 + 3a^2 + 9a + 27$$

Luego la diferencia de potencias de igual grado par quedará factorizada de la siguiente manera:

$$a^4 - 3^4 = (a - 3) \cdot (a^3 + 3a^2 + 9a + 27)$$

2. La diferencia de dos potencias de *igual grado impar* solamente es divisible por la diferencia de las bases de dichas potencias.

Ejemplo:

El binomio $x^5 - 32$ es divisible por $x - 2$

$$(x^5 - 32) : (x - 2) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

Luego la diferencia de potencias de igual grado impar quedará factorizada de la siguiente manera:

$$x^5 - 32 = (x - 2) \cdot (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

Ejemplo aplicando Ruffini: $y^3 + 27 = y^3 + 3^3$ es divisible por $y + 3$, entonces hacemos la división aplicando la Regla de Ruffini y obtenemos el otro factor

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 27 \\ -3 & & -3 & 9 & -27 \\ \hline & 1 & -3 & 9 & 0 \end{array} \Rightarrow y^3 + 27 = (y + 3) \cdot (y^2 - 3y + 9)$$

Nota: Para factorizar un polinomio debemos fijarnos primero que forma tiene para aplicar el caso correspondiente. Muchas veces a un mismo polinomio se le aplican varios casos de factores para llegar a la expresión factorizada.

Ejemplo:

$$y^2x^2 + 2y^3x - 2yx^3 - x^2y^2 - y^4 + x^4 =$$

$$\text{ordenando: } x^4 - x^2y^2 + 2y^3x - 2yx^3 + y^2x^2 - y^4$$

$$\text{agrupando: } (x^4 - x^2y^2) + (2y^3x - 2yx^3) + (y^2x^2 - y^4)$$

$$\text{factor por grupos: } x^2(x^2 - y^2) - 2yx(x^2 - y^2) + y^2(x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2yx + y^2) \cdot (x^2 - y^2)$$

\downarrow \downarrow
Binomio al cuadrado Diferencia de cuadrados

$$\Rightarrow (x-y)^2 \cdot (x-y) \cdot (x+y)$$

$$\Rightarrow (x-y)^3 \cdot (x+y)$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE POLINOMIOS (MCD)

El MCD de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado y mayor coeficiente numérico que es factor o divisor de los polinomios dados.

Para hallar el MCD:

1) Se factorizan los polinomios

2) El MCD es el producto de los factores comunes elevados a la menor potencia con que figuran.

Ejemplo: Hallar el MCD de $8x^2 - 16xy + 8y^2$ y $4x^2 - 4y^2$

$$1) 8x^2 - 16xy + 8y^2 = 8(x^2 - 2xy + y^2) = 8(x-y)^2$$

$$4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2) = 4(x-y)(x+y)$$

$$2) \text{MCD} = 4(x-y)$$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE POLINOMIOS (mcm)

El mcm de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado y coeficiente numérico que es múltiplo de todos los polinomios dados.

Para hallar el mcm:

1) Se factorizan los polinomios

2) El mcm es el producto de todos los factores, comunes y no comunes, con el mayor exponente con que figuran.

Ejemplo: Hallar el mcm de:

$$5ma + 5mb - 5na - 5nb \quad y \quad m^2a^2 - m^2b^2 - 2nma^2 + 2nmb^2 + n^2a^2 - n^2b^2$$

$$1) 5ma + 5mb - 5na - 5nb = 5m(a+b) - 5n(a+b) = (5m-5n)(a+b) = 5(m-n)(a+b)$$

$$m^2a^2 - m^2b^2 - 2nma^2 + 2nmb^2 + n^2a^2 - n^2b^2 = m^2(a^2 - b^2) - 2nm(a^2 - b^2) + n^2(a^2 - b^2) \\ = (m^2 - 2nm + n^2)(a^2 - b^2) = (m-n)^2(a-b)(a+b)$$

$$2) \text{El mcm} = 5(m-n)^2(a-b)(a+b)$$

Ejercicio: Hallar el MCD y mcm de los siguientes polinomios:

$$9a^2 - x^2 \quad 9a^2 + 6ax + x^2 \quad 3az + xz$$

$$1) 9a^2 - x^2 = (3a-x)(3a+x)$$

$$2) \text{MCD} = (3a+x)$$

$$9a^2 + 6ax + x^2 = (3a+x)^2$$

$$\text{mcm} = (3a+x)^2(3a-x)z$$

$$3az + xz = z(3a+x)$$

Relación entre Ceros y Coeficientes de un Polinomio

1º) Polinomio de 2º Grado: $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + b/ax + c/a)$

sean α, β sus ceros, entonces la descomposición factorial del polinomio es:

$$P(x) = a(x-\alpha) \cdot (x-\beta) \quad \text{distribuyendo se obtiene:}$$

$$P(x) = a[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \quad \text{debe ser el mismo } P(x) \text{ dado}$$

$$\Rightarrow \text{por igualdad de polinomios se tiene: } \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2º) Polinomio de 3º Grado: $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d = a [x^3 + b/a x^2 + c/a x + d/a]$

sean α, β, γ sus ceros, entonces la descomposición factorial del polinomio es:

$P(x) = a (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma)$ distribuyendo se obtiene:

$P(x) = a [x^3 - (\alpha + \beta + \gamma) x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) x - \alpha\beta\gamma]$ debe ser el mismo $P(x)$ dado

$$\Rightarrow \text{por igualdad de polinomios se tiene: } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Estas relaciones son útiles cuando se conoce alguna relación adicional sobre los ceros, por ejemplo se quiere hallar los ceros del polinomio $P(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ sabiendo que sus ceros están en progresión aritmética.

Solución: usando el dato adicional, sabemos que los ceros se pueden escribir así:

$\alpha - r, \alpha, \alpha + r$ (progresión aritmética de razón r)

La suma de los ceros es: $\alpha - r + \alpha + \alpha + r = -9 \Rightarrow 3\alpha = -9 \Rightarrow \alpha = -3$ por lo tanto ya tenemos un cero

Verificamos por Ruffini:

| | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|--------------|
| | 1 | 9 | 13 | 15 | |
| -3 | | -3 | -18 | -15 | |
| | 1 | 6 | 5 | 0 | → -3 es raíz |

Los otros ceros son los ceros del polinomio $x^2 + 6x + 5$. Aplicando fórmula de 2º grado se obtienen -1 y -5 , entonces los ceros buscados son $-1, -3, -5$ y están en progresión aritmética de razón igual a -2 .

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS O RACIONALES

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tal que $Q(x) \neq 0$ se denomina expresión algebraica racional a toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Ejemplos: $\frac{2x+a}{5x} \quad \forall x \neq 0$ $\frac{x^3+8}{x^2-3x+2} \quad \forall x: x \neq 1 \wedge x \neq 2$

Definición: Una expresión algebraica racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $Q(x) \neq 0$, se dice que es irreducible si $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores en común.

Simplificación de Expresiones Algebraicas Racionales: Para convertir una expresión algebraica racional en irreducible se debe simplificar, es decir se deben factorar numerador y denominador y luego suprimir todos los factores comunes a ambos.

Ejemplo: Simplificar $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \forall x: x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1).(x^2 + x + 1)}{(x-1).(x+1)} = \frac{(x^2 + x + 1)}{x + 1}$$

Común Denominador: Para reducir dos o más expresiones racionales a un mínimo común denominador, se trabaja de la misma forma que en la suma de fracciones, es decir se toma el mcm de los denominadores, y los numeradores se obtienen dividiendo el mcm por el denominador correspondiente y el resultado se lo multiplica por el respectivo numerador.

Ejemplo: Reducir las siguientes expresiones racionales a mínimo común denominador

$$\frac{2xy}{a^2 - b^2} \quad ; \quad \frac{3(a+b)}{a^2 - 2ab + b^2} \quad ; \quad \frac{5}{a+b}$$

1º) Factorar los denominadores:

$$a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a + b = a + b$$

2º) El mcm de los denominadores es el producto de todos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente con que figuran, por lo tanto:

$$\text{El mcm es : } (a + b).(a - b)^2$$

3º) Obtener los respectivos numeradores:

$$\text{Para } \frac{2xy}{a^2 - b^2} = \frac{2xy}{(a - b).(a + b)} \rightarrow \frac{2xy(a - b)}{(a - b)^2.(a + b)}$$

$$\text{Para } \frac{3(a + b)}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{3(a + b)}{(a - b)^2} \rightarrow \frac{3(a + b)(a + b)}{(a - b)^2.(a + b)} = \frac{3(a + b)^2}{(a - b)^2.(a + b)}$$

$$\text{Para } \frac{5}{a + b} \rightarrow \frac{5(a - b)^2}{(a - b)^2(a + b)}$$

Operaciones con Expresiones Algebraicas Racionales

1) Suma:

a) Primer Caso: Cuando las fracciones tienen igual denominador, la suma es otra fracción de igual denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores dados.

$$\frac{A(x)}{C(x)} + \frac{B(x)}{C(x)} = \frac{A(x) + B(x)}{C(x)}$$

Ejemplo: $\frac{3x}{2x^2y} + \frac{5xy}{2x^2y} + \frac{1}{2x^2y} = \frac{3x + 5xy + 1}{2x^2y}$

b) **Segundo Caso:** Cuando los denominadores son distintos, las fracciones deben reducirse previamente a un mínimo común denominador y luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplo: $\frac{2}{x-1} + \frac{4x}{2(x+1)} + \frac{3x^2}{x^2-1}$

- Primero hallamos el mcm de los denominadores:

$$\begin{array}{l} x-1 \\ 2(x+1) \\ x^2-1=(x-1)(x+1) \end{array} \Rightarrow \text{mcm} = 2(x-1)(x+1)$$

- Hallamos los nuevos numeradores:

$$\frac{2}{x-1} \rightarrow \frac{2 \cdot 2(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{4x}{2(x+1)} \rightarrow \frac{4x(x+1)}{2(x+1)(x+1)} = \frac{4x^2 - 4x}{2(x+1)(x+1)}$$

$$\frac{3x^2}{x^2-1} \rightarrow \frac{3x^2 \cdot 2}{2 \cdot (x-1)(x+1)} = \frac{6x^2}{2 \cdot (x-1)(x+1)}$$

- Realizamos la suma:

$$\frac{4(x+1)}{2(x-1)(x+1)} + \frac{4x^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} + \frac{6x^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4x + 4 + 4x^2 - 4x + 6x^2}{2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{10x^2 + 4}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2(5x^2 + 2)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{5x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

2) **Diferencia:** Se procede igual que en la suma

3) **Multiplicación:** El producto de dos o más expresiones racionales es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{A(x)}{C(x)} \cdot \frac{B(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot B(x)}{C(x) \cdot D(x)}$$

En la práctica conviene factorar previamente los numeradores y denominadores con el objeto de hacer todas las simplificaciones posibles antes de calcular el producto.

Ejemplo:

$$\frac{4+2x}{9-x^2} \cdot \frac{3+x}{x^2} \cdot \frac{6x-2x^2}{2+x} = \frac{2(2+x)}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{3+x}{x \cdot x} \cdot \frac{2x(3-x)}{2+x} = \frac{4}{x}$$

4) **División:** El cociente de dos expresiones racionales es el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{A(x)}{B(x)} \div \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{D(x)}{C(x)} = \frac{A(x) \cdot D(x)}{B(x) \cdot C(x)}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2a^3x^2}{x^3-1} \div \frac{4a^2-2a}{x-1} &= \frac{2a^3x^2}{x^3-1} \cdot \frac{x-1}{4a^2-2a} = \frac{2a^3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x-1}{2a(2a-1)} \\ &= \frac{2a^3x^2(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)2a(2a-1)} = \frac{a^2x^2}{(x^2+x+1)(2a-1)} \end{aligned}$$

ESTUDIANTIL

FRENTE
ESTUDIANTIL

UNIDAD III

Ecuación, Inecuación y Función Lineal.

Función Valor Absoluto. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

ECUACIÓN LINEAL

Dada una igualdad entre dos expresiones algebraicas, se trata de una "identidad", si la igualdad es válida para todos los valores posibles de las variables en juego.

Por ejemplo sea en \mathbb{R} la siguiente igualdad: $x - 1 = \frac{1}{2}(2x - 2)$. Es una identidad porque se verifica para todos los valores de la variable x que pertenecen a \mathbb{R} .

Una igualdad es una "ecuación", si solo es válida para determinados valores de la variable o para ningún valor de las variables.

Resolver una ecuación significa hallar el valor de las variables que verifican la igualdad., es decir encontrar el conjunto solución.

Ejemplos:

a) $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. Se dice que el conjunto solución es vacío. $C_s = \emptyset$

b) $2x + 4 = 0$ tiene una solución que es $x = -2$ entonces $C_s = \{x \in \mathbb{R} / x = -2\}$ o $C_s = \{-2\}$

c) $x + y = 0$ tiene infinitas soluciones, son todos los valores de las variables x e y que verifican la igualdad, por lo tanto $x = -y$, entonces $C_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y\}$ o

$$C_s = \{(-y, y)\}.$$

d) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, como el primer término es un trinomio cuadrado perfecto de la forma $(x + 1)^2$ se obtiene la siguiente igualdad: $(x + 1)^2 = (x + 1)^2$ que es una identidad, por lo tanto admite infinitas soluciones ya que se verifica para cualquier valor real de x , entonces $C_s = \mathbb{R}$

Ecuaciones Equivalentes: Dos ecuaciones son equivalentes si admiten el mismo conjunto solución.

Ecuación de Primer Grado o Lineal: Una ecuación lineal en una variable es una ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$, donde el primer miembro es una expresión polinómica de grado uno.

Para hallar la solución de una ecuación se utilizan las siguientes propiedades (basadas en las propiedades de la suma y producto en \mathbb{R}).

Propiedad 1: Si a ambos miembros de una ecuación se suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica se obtiene una ecuación equivalente a la primera

Propiedad 2: Si a ambos miembros de una ecuación se multiplica o divide un mismo número o una misma expresión algebraica se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

Clasificación de la Solución de una Ecuación:

1) **Solución Única:** La ecuación admite un único valor de la variable como solución.

Ejemplo:

$$3x - 2 = x + 6$$

Vamos a construir una sucesión de ecuaciones equivalentes a la primera para determinar el conjunto solución.

$$3x - 2 - x + 2 = x + 6 - x + 2$$

se resta en ambos miembros x y se suma 2
(propiedad uniforme de la suma y resta en \mathbb{R})

$$(3x - x) + (-2 + 2) = (x - x) + (6 + 2)$$

por propiedad asociativa de la suma y existencia del opuesto y del neutro aditivo

$$2x = 8$$

$$2x \div 2 = 8 \div 2$$

se divide ambos miembros por 2
(propiedad uniforme del producto y cociente)

$$x = 4$$

El conjunto solución de la ecuación dada es: $C_s = \{4\}$

2) Infinitas Soluciones: La ecuación admite como solución infinitos valores para la variable. (En la búsqueda de ecuaciones equivalentes se arriba a una identidad).

Ejemplo: $3x + 2(x - 1) = x + 4(x - 1/2)$

$$3x + 2x - 2 = x + 4x - 2$$

por propiedad distributiva

$$5x - 2 = 5x - 2$$

por propiedad asociativa de suma

Esta última ecuación es una identidad, para cualquier valor real de x se cumple por lo tanto la ecuación tiene infinitas soluciones, entonces $C_s = \mathbb{R}$

3) Ninguna Solución: No existen valores de la variable que verifiquen la ecuación. (En la búsqueda de ecuaciones equivalentes se llega a una contradicción).

Ejemplo: $2(2x + 3) = 4x + 5$

$$4x + 6 = 4x + 5$$

por propiedad cancelativa de la suma

$$6 = 5$$

Se obtiene una falsa igualdad por lo tanto no existe solución para la ecuación dada, entonces $C_s = \emptyset$

Aplicaciones: hay muchos problemas que pueden resolverse mediante una ecuación lineal con una variable (en matemática, física, química, biología, entre otras).

Ejemplos:

1) El triplo de un número aumentado en 5 es igual al número disminuido en 3 . ¿Cuál es el número?

Al n° que no se conoce se lo llama x

Al triplo del n° se lo llama $3x$

El triplo del n° aumentado en 5 $3x + 5$

El n° disminuido en 3 $x - 3$

Con todo esto se plantea la ecuación: $3x + 5 = x - 3$

Se resuelve.

$$3x + 5 - 5 - x = x - 3 - x - 5$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

$$C_s = \{-4\}$$

2) Un poste tiene pintada de negro $\frac{2}{5}$ de su longitud (dada en metros), $\frac{3}{4}$ de lo que queda de azul y el resto, que mide 0,45 m, está pintado de blanco. ¿Cuál es la longitud del poste?

Sea x = altura del poste en metros

Parte pintada de negro: $\frac{2}{5}x$

Parte restante. $x - \frac{2}{5}x$

Los $\frac{3}{4}$ de la parte restante: $\frac{3}{4}(x - \frac{2}{5}x)$ es azul

Si se suma parte negra + blanca + azul se obtiene la longitud del poste, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}(x - \frac{2}{5}x) + 0,45 = x$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{10}x + 0,45 = x$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{10}x + 0,45 - x - 0,45 = x - 0,45$$

$$-\frac{3}{20}x = \frac{45}{100}$$

$$x = 3$$

Rta: el poste mide 3 metros

3) Al realizar un ensayo de laboratorio, un Ingeniero Químico debe medir la temperatura de una muestra. Para ello utiliza un termómetro de fabricación inglesa con el que determina dicha temperatura en grados Fahrenheit. Sin embargo, en su informe la temperatura debe estar expresada en grados Celsius. El Ingeniero sabe que el valor de la temperatura expresada en Celsius es cinco novenos de la temperatura expresada en Fahrenheit disminuida en 32° . ¿Qué ecuación debe plantear el Ingeniero para pasar de una escala de temperaturas a otra?

Llamemos T_C a la temperatura en grados Celsius y T_F a la temperatura en grados Fahrenheit.

$$\text{Entonces, } T_C = (5/9)(T_F - 32^\circ)$$

Ecuaciones con Valor Absoluto: Son aquellas ecuaciones en las cuales la variable se ve afectada por el valor absoluto. Para resolver este tipo de ecuaciones se recurre a la definición de valor absoluto.

Ejemplos:

$$1) |x| = 3 \Rightarrow |x| = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geq 0 \\ -3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow C_s = \{-3, 3\}$$

2) $|x - 2| = 5$ por definición de valor absoluto hay dos posibilidades:

$$x - 2 = 5 \quad \vee \quad x - 2 = -5 \Rightarrow x = 7 \quad \vee \quad x = -3 \Rightarrow C_s = \{-3, 7\}$$

Gráficamente los valores que cumplen con la ecuación son aquellos números que distan 5 unidades del número 2.

INECUACIÓN LINEAL

Una inecuación en la variable x es una desigualdad en la que está involucrada la variable.

Inecuación Lineal: Es una inecuación que tiene alguna de las siguientes formas:

$$a \cdot x + b \geq 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

$$a \cdot x + b \leq 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

$$a \cdot x + b > 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

$$a \cdot x + b < 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

- Resolver una inecuación lineal es hallar los valores de la variable que satisfacen la desigualdad.
- Para encontrar el conjunto solución de una inecuación lineal se procede en forma análoga a la resolución de una ecuación lineal, pero con el cuidado de recordar que en una desigualdad cuando ambos miembros se multiplican o dividen por un mismo número negativo entonces el sentido de la desigualdad cambia.
- El conjunto solución se expresa mediante intervalos reales.

En el primer tipo de inecuación se tiene $a \cdot x + b \geq 0$ restando b en ambos miembros:

$$a \cdot x \geq -b \quad \text{se presentan dos opciones:}$$

$$\text{- si } a > 0 \Rightarrow x \geq -b/a \quad (\text{no cambia la desigualdad}) \Rightarrow C_s = [-b/a, \infty)$$

$$\text{- si } a < 0 \Rightarrow x \leq -b/a \quad (\text{cambia la desigualdad}) \Rightarrow C_s = (-\infty, b/a]$$

Ejemplos: Encontrar el conjunto solución en \mathbb{R} de:

1) $2x + 4 - 5x \leq 2$

$$-3x + 4 \leq 2$$

$$-3x \leq 2 - 4$$

$$-3x \leq -2$$

$$x \geq (-2) \div (-3)$$

$$x \geq 2/3 \quad \Rightarrow \quad C_s = [2/3, \infty)$$

2) $5x + 2 > 5x - 1$

$$5x + 2 - 5x + 1 > 0$$

$$3 > 0 \quad \text{esta desigualdad es verdadera para cualquier valor de } x \Rightarrow C_s = \mathbb{R}$$

3) $2x + 6 < 2x + 3$

$$2x + 6 - 2x - 3 < 0$$

$$3 < 0 \quad \text{esta desigualdad es falsa para cualquier valor de } x \Rightarrow C_s = \emptyset$$

Inecuaciones con Valor Absoluto

Son aquellas inecuaciones en las cuales la variable se ve afectada por el valor absoluto. Para resolver este tipo de ecuaciones se recurre a la definición de valor absoluto y a las siguientes propiedades:

$$|x - a| \leq b \Rightarrow -b \leq x - a \leq b \Rightarrow -b + a \leq x \leq b + a \Rightarrow C_s = [-b + a, b + a]$$

$$|x - a| > b \Rightarrow x - a < -b \vee x - a > b \Rightarrow x < -b + a \vee x > b + a \Rightarrow C_s = (-\infty, -b + a) \cup (b + a, \infty)$$

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de: $|x - 2| < 4$

$$-4 < x - 2 < 4 \Rightarrow -4 + 2 < x < 4 + 2 \Rightarrow -2 < x < 6 \Rightarrow C_s = (-2, 6)$$

FUNCIÓN

Definición de Par Ordenado: Se llama par ordenado al conjunto de dos elementos x e y simbolizado por (x,y) . Es ordenado porque $(x,y) \neq (y,x)$

En el par (x,y) , x es el primer elemento del par e y es el segundo elemento

Definición en Función: dada una relación R entre dos conjuntos A y B , decimos que R es una función de A en B , si a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B .

En símbolos $f: A \rightarrow B$. Al conjunto A se lo llama dominio de la función, siendo B el rango de la función. La imagen o codominio de la función es el subconjunto de B , cuyos elementos se corresponden con algún elemento del dominio.

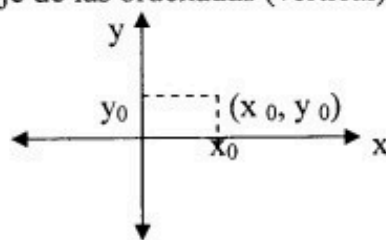
Si $x \in A$ e $y \in B$ entonces se escribe $y = f(x)$

Ejemplos:

- 1) $y = 3x$ es una función, cuyo Dominio es \mathbb{R} y cuya Imagen (en este caso coincide con el rango) es \mathbb{R}
- 2) $y = \sqrt{x+1}$ no es función porque para cada valor de x le corresponden dos valores de y , por ejemplo para $x = 3$ $y = \pm 2$.
- 3) $y = 3$ es una función, cuyo Dominio es \mathbb{R} y cuya Rango es \mathbb{R} , la Imagen es 3 (en este caso la Imagen no coincide con el rango)

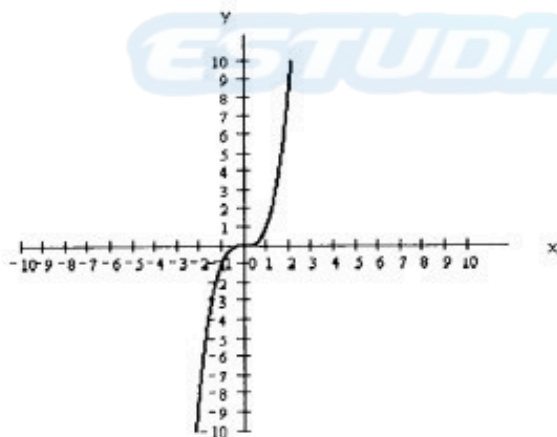
Representación Gráfica de una Función:

Todo punto del plano se expresa como un par ordenado (x_0, y_0) donde x_0 es la primer componente e y_0 es la segunda componente y se pueden representar en un sistema de ejes coordenados cartesianos, en el que el eje horizontal es el eje de las abscisas y se lo llama eje x , mientras que el eje de las ordenadas (vertical) se lo llama eje y .



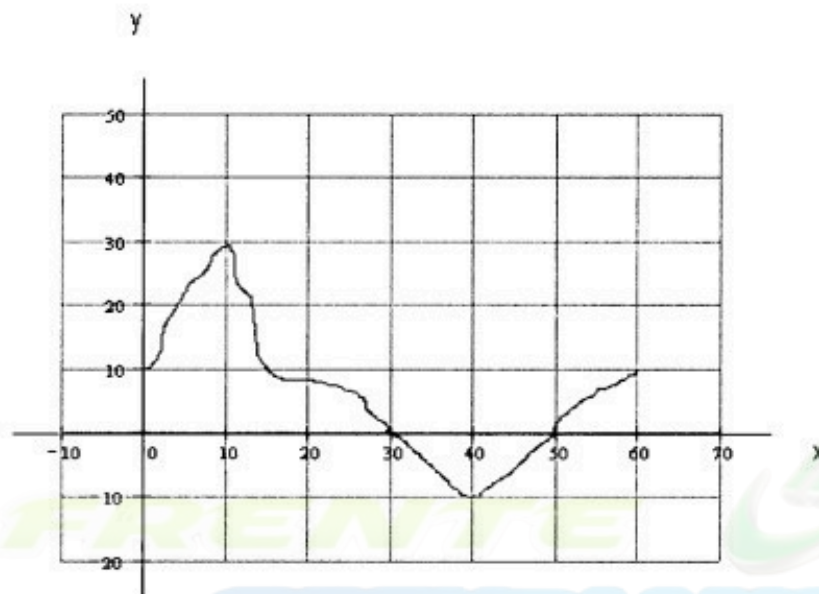
Como la función es el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) tal que $y = f(x)$, entonces una función $y = f(x)$ se puede representar en el sistema de ejes coordenados cartesianos graficando los pares ordenados que pertenecen a la función como puntos del plano. En el eje x se representan los elementos del dominio de la función y en el eje y los valores de la imagen.

Ejemplo: $y = x^3$



Interpretación del Gráfico de una Función:

Consideremos el siguiente gráfico de una función $y = f(x)$



En el gráfico se observa que y se incrementa para los valores de x que van de 0 a 10, donde y alcanza el máximo valor que es 30 y luego empieza a decrecer cortando al eje x para el valor de $x = 30$, hasta llegar a un valor mínimo de -10 cuando x es 40. Luego a partir de $x = 40$ el valor de y vuelve a incrementarse cortando nuevamente al eje x para el valor de $x = 50$, hasta llegar a un valor de 10 para $x = 60$.

Toda esta información se puede detallar teniendo en cuenta los siguientes conceptos:

Función Creciente: Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a,b]$, decimos que la función es creciente si se cumple $f(x_1) < f(x_2) \forall x_1, x_2 \in [a,b]$, siendo $x_1 < x_2$

Función Decreciente: Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a,b]$, decimos que la función es decreciente si se cumple $f(x_1) > f(x_2) \forall x_1, x_2 \in [a,b]$, siendo $x_1 < x_2$

Máximo: Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a,b]$, tal que $c \in (a,b)$ decimos que en $x = c$ hay un máximo local o relativo si la función es creciente a la izquierda de $x = c$ y decreciente a la derecha de $x = c$.

Si la función es decreciente a la derecha de $x = a$, decimos que en $x = a$ hay un máximo relativo.

Si la función es creciente a la izquierda de $x = b$, decimos que en $x = b$ hay un máximo relativo.

Un máximo $(c, f(c))$ es absoluto si $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a,b]$

Mínimo: Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a,b]$, tal que $c \in (a,b)$ decimos que en $x = c$ hay un mínimo local o relativo si la función es decreciente a la izquierda de $x = c$ y creciente a la derecha de $x = c$.

Si la función es creciente a la derecha de $x = a$, decimos que en $x = a$ hay un mínimo relativo.

Si la función es decreciente a la izquierda de $x = b$, decimos que en $x = b$ hay un mínimo relativo.

Un mínimo $(c, f(c))$ es absoluto si $f(c) \leq f(x) \forall x \in [a,b]$

Cero: Dada una función f , definida en $x = c$, se dice que $x = c$ es un cero de f si $f(c) = 0$

En el ejemplo anterior ahora detallamos la información de la siguiente manera:

- La función es creciente en los intervalos $(0,10)$ y $(40,60)$
- La función es decreciente en el intervalo $(10,40)$
- La función tiene dos ceros en $x = 30$ y en $x = 50$
- La función tiene un máximo absoluto en $x = 10$
- La función tiene un mínimo absoluto en $x = 40$
- La función tiene un máximo relativo en $x = 60$
- La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$

Clasificación de las Funciones:

Función Inyectiva: Dada la función $f: A \rightarrow B$ decimos que es inyectiva si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas.

Función Sobreyectiva: Dada la función $f: A \rightarrow B$ decimos que es sobreyectiva si todo elemento de B es imagen al menos de un elemento de A . Es decir, si la imagen coincide con el rango.

Función Biyectiva: Dada la función $f: A \rightarrow B$ decimos que es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Nota: Si una función es biyectiva entonces se puede definir su función inversa:

Función Inversa: dada la función biyectiva $f: A \rightarrow B$, existe la función inversa, denotada por f^{-1} , tal que $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Ejemplo: la función $y = 2x+1$ es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva y tiene inversa. La función inversa se obtiene despejando la variable x :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(y - 1)$$

FUNCIÓN LINEAL

Definición: Se llama función lineal a toda función de la forma $f(x) = a x + b$ o bien $y = a x + b$, donde "x" es la variable independiente (puede tomar distintos valores) e "y" es la variable dependiente (su valor depende del valor de x).

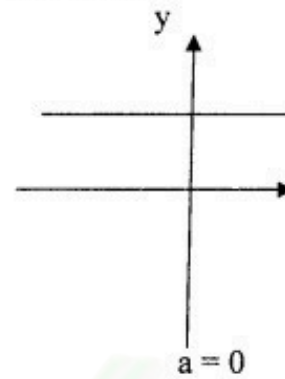
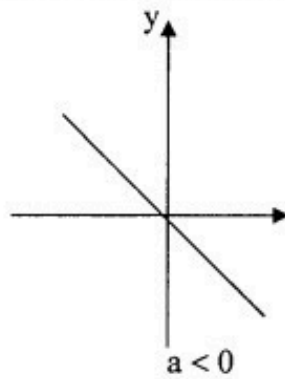
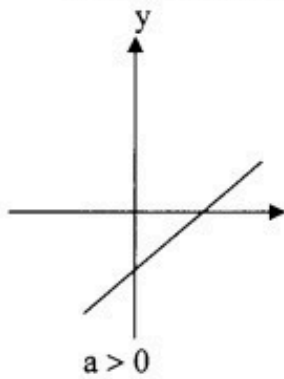
Si se grafican en el plano todos los puntos (x,y) que verifican esta ecuación, se observa que quedan alineados en una recta, por lo tanto a la expresión $y = a x + b$ se la llama "ecuación de la recta" (es una ecuación lineal con dos variables).

El número a se llama pendiente y el número b es la ordenada al origen.

La función lineal $f(x) = a x + b$ tiene las siguientes características:

- Dominio de $f = \mathbb{R}$
- Imagen de $f = \mathbb{R}$
- El gráfico es una recta
- Si $a > 0$ la función es creciente
- Si $a < 0$ la función es decreciente
- Si $a = 0$ la función es constante

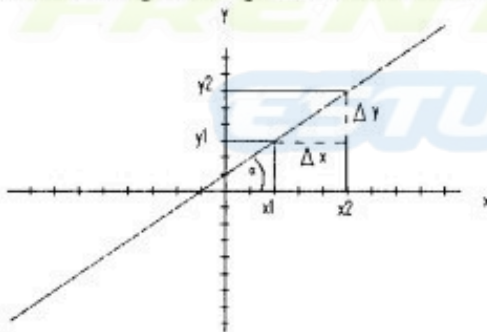
- b es el punto donde la función corta al eje de las ordenadas (eje y)



Ecuación de la recta: $y = a x + b$

b : ordenada al origen

a : pendiente de la recta (indica la inclinación de la recta en el plano, geoméricamente “ a ” es la tangente del ángulo α que forma la recta con el semieje positivo de las x)



$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

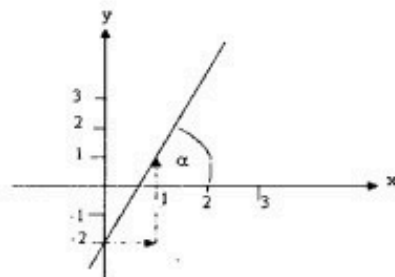
Intersección con los Ejes: Para hallar el punto de intersección de la recta con los ejes coordenados se procede así:

- Intersección con eje x : hacer $y = 0$ y despejar x
- Intersección con eje y : hacer $x = 0$ y despejar y

Nota: Para graficar una recta se puede representar dos puntos de ella y luego unirlos o bien hacer uso de los datos que figuran en su ecuación ya que la ordenada al origen indica un punto de la recta y a partir de ese punto nos movemos en el plano de acuerdo al valor de la pendiente (el numerador indica la variación en y , el denominador indica la variación en x)

Ejemplo: para graficar $y = 3 x - 2$ la ordenada al origen es -2 , por lo tanto el punto $(0,-2)$ es un punto de la recta donde corta al eje y . La pendiente es 3 y se la puede escribir así:

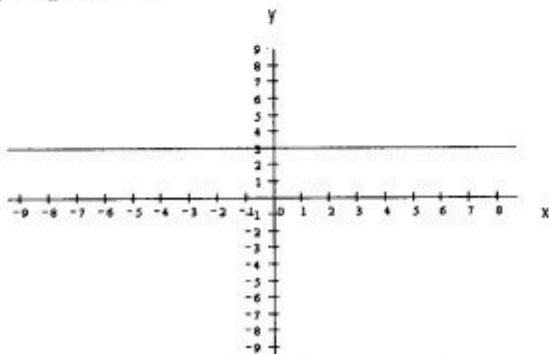
$a = \frac{3}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, entonces a partir del punto $(0,-2)$ se cuenta 3 unidades en el sentido positivo del eje y , y una unidad en el sentido positivo del eje x para ubicar un segundo punto de la recta y así poder trazarla.



Casos de Rectas Especiales:

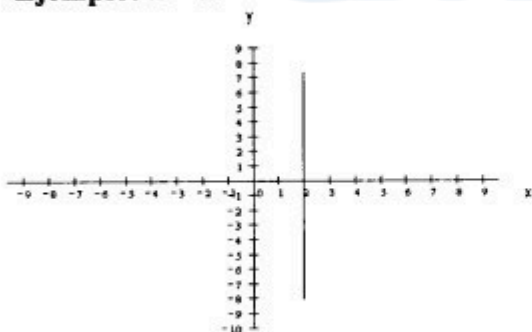
1) Rectas paralelas al eje x: Su ecuación tiene la forma $y = \text{constante}$, la pendiente es 0.

Ejemplo: $y=3$



2) Rectas paralelas al eje y: Su ecuación tiene la forma $x = \text{constante}$, no puede determinarse su pendiente por no ser un número real.

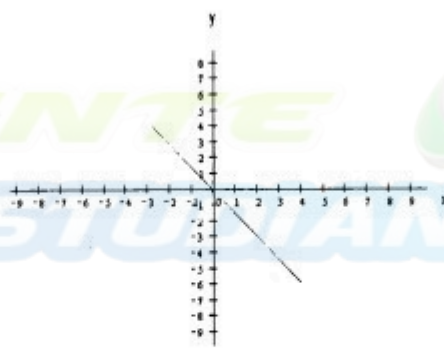
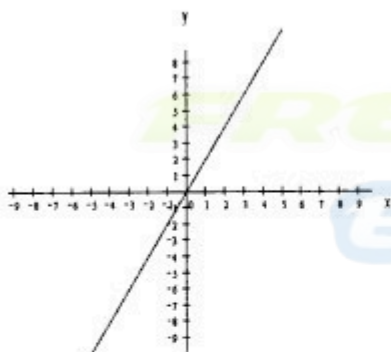
Ejemplo: $x = 2$



3) Rectas que pasan por el origen: Su ecuación tiene la forma $y = a \cdot x$. Corta a los ejes en el punto (0,0).

Si $a > 0 \Rightarrow$ el ángulo α es agudo

Si $a < 0 \Rightarrow$ el ángulo α es obtuso



Distintas formas de la Ecuación de la Recta

1) Ecuación explícita de la recta

$$y = a x + b$$

con $a =$ pendiente
 $b =$ ordenada al origen

2) Ecuación implícita o general de la recta:

$$A x + B y + C = 0$$

3) Ecuación segmentaria de la recta:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

m = intersección con eje x
n = intersección con eje y

Ejemplo: Escribir los tres tipos de ecuación de la recta cuya ordenada al origen es 4 y su pendiente -2

- Ecuación explícita $\rightarrow y = -2x + 4$

- Ecuación implícita o general \rightarrow se obtiene sumando a la ecuación anterior $2x$ en ambos términos y restando 4 en ambos términos $\rightarrow 2x + y - 4 = 0$

- Ecuación segmentaria \rightarrow se busca las intersecciones con los ejes

Intersección con eje x: se hace $y = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Intersección con eje y: se hace $x = 0 \Rightarrow y = 4$

Por lo tanto la ecuación segmentaria es $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

(Otra forma de hallar la ecuación segmentaria es dividir toda la ecuación explícita por 4 y sumar $2x$ en ambos miembros)

Ecuación de la Recta conocido un Punto (x_0, y_0) y la Pendiente

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Ejemplo: Escribe la ecuación de la recta de pendiente 3 y que pasa por el punto $(-2, 5)$

$$y - 5 = 3(x - (-2)) \Rightarrow y = 3(x + 2) + 5 \Rightarrow y = 3x + 6 + 5 \Rightarrow y = 3x + 11$$

Ecuación de la Recta conocidos dos Puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1)

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Ejemplo: escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -1)$ y $(2, 7)$

$$y - (-1) = \frac{7 - (-1)}{2 - 3} \cdot (x - 3)$$

$$y + 1 = \frac{8}{-1} (x - 3) \Rightarrow y + 1 = -8(x - 3) \Rightarrow y = -8x + 24 - 1$$

$$\Rightarrow y = -8x + 23$$

Rectas Paralelas y Perpendiculares

- Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Sean las rectas $r_1: y = a_1 x + b_1$ y $r_2: y = a_2 x + b_2$

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$

Ejemplos:

a) Hallar una recta paralela a $y = 2x + 5$ que pase por el punto $(1, 1)$

$$a = 2 \text{ y pasa por } (1,1) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

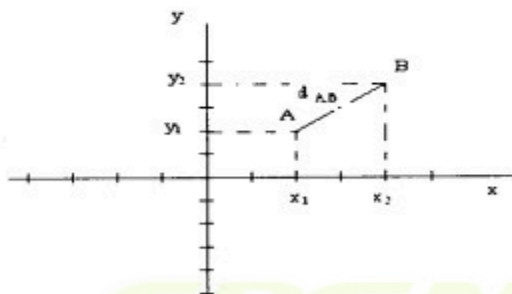
b) Hallar una recta perpendicular $y = -2/3 x + 1$ que pase por $(2,3)$

$$a \cdot (-2/3) = -1 \Rightarrow a = 3/2 \Rightarrow y - 3 = 3/2(x - 2) \Rightarrow y = 3/2 x - 3/2 + 3 \Rightarrow y = 3/2 x + 3/2$$

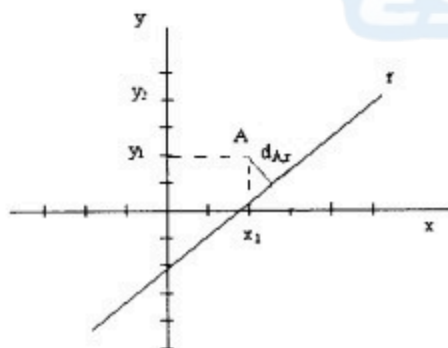
Distancias

1) Distancia entre Dos Puntos: Dados los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ la distancia entre ambos es:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



2) Distancia entre Punto y Recta: Dado el punto $A = (x_1, y_1)$ y la recta $r: Ax + By + C = 0$ la distancia entre ambos es:



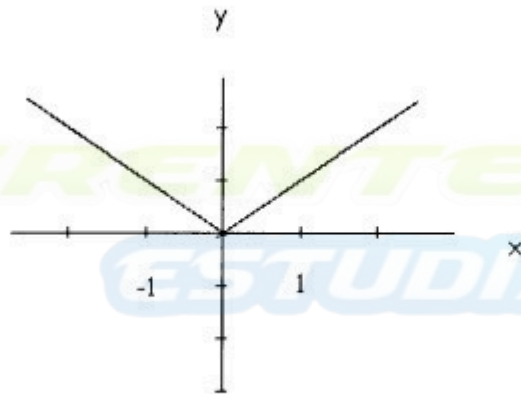
$$d_{A,r} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Se define función valor absoluto a la función de la forma $y = |x|$

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{siendo Dominio de } f = \mathbb{R}, \quad \text{Imagen de } f = [0, \infty)$$

Su representación gráfica son dos semirrectas de pendiente 1 y -1, que se cortan en el origen de coordenadas.

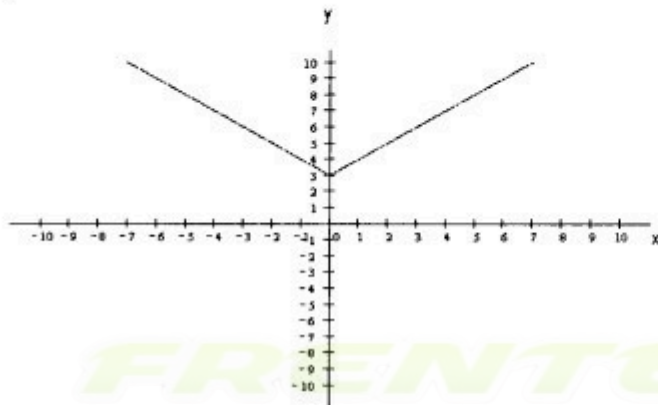


Nota: Si se suma una constante k a la función valor absoluto $\Rightarrow y = |x| + k$

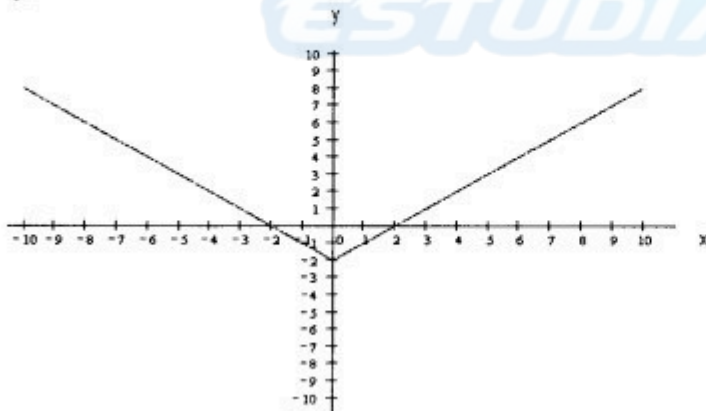
La gráfica anterior se desplaza k unidades en la dirección del eje y (hacia arriba si k es positivo y hacia abajo si k es negativo).

Ejemplo: Graficar las funciones $y_1 = |x| + 3$, $y_2 = |x| - 2$

y_1

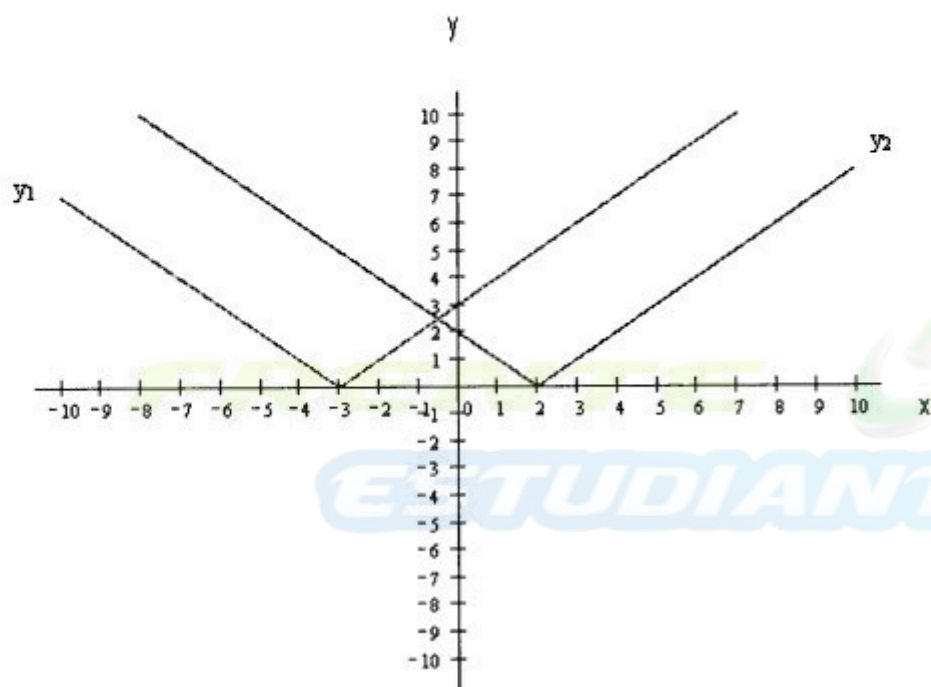


y_2



- Si la función tiene la forma $y = |x + k|$ la función se desplaza k unidades hacia la derecha si k es negativo y hacia la izquierda si k es positivo

Ejemplo: $y_1 = |x+3|$, $y_2 = |x-2|$

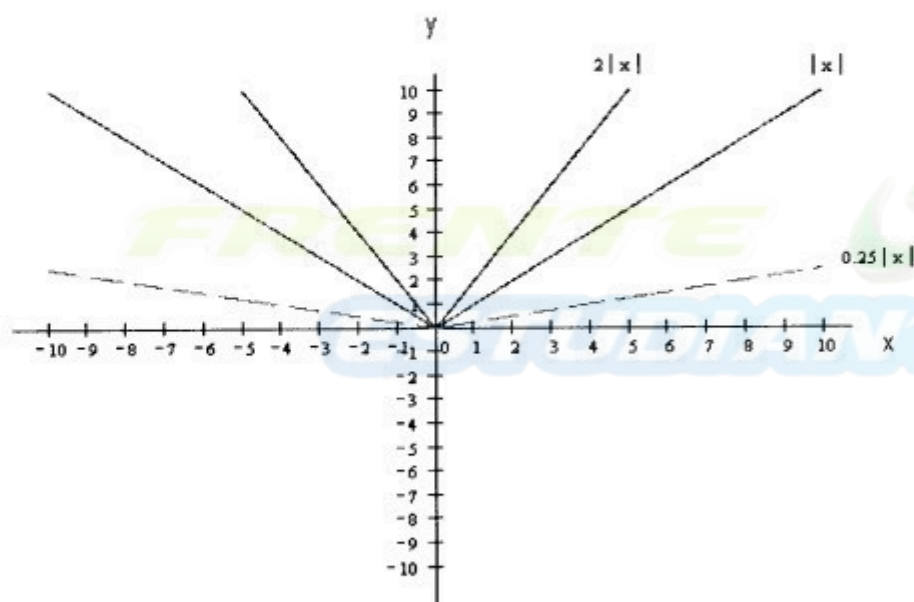


- Si la función tiene la forma $y = k |x|$, el efecto de multiplicar por k en la gráfica es un cambio de la inclinación de las dos ramas, hay un cambio de pendiente.

- si $k > 0 \Rightarrow$ Imagen = $[0, \infty)$

- si $k < 0 \Rightarrow$ Imagen = $(-\infty, 0]$

Ejemplos: graficar $y_1 = |x|$, $y_2 = 2|x|$, $y_3 = 0,25|x|$



SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Hemos visto la ecuación de la recta, este tipo de ecuación es una ecuación lineal con dos variables y puede expresarse de la forma $a x + b y + c = 0$

Sistema de Dos Ecuaciones Lineales con Dos Variables

Es un sistema formado por dos ecuaciones lineales con dos variables:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \text{ son números reales, } x \text{ e } y \text{ son variables}$$

Resolver el sistema significa encontrar, el o los valores del par (x, y) que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente.

Métodos analíticos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

1) Método de Igualación:

Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Se despeja una variable en ambas ecuaciones, por ejemplo la variable y

$$y = \frac{-a_1x - c_1}{b_1} \quad (3)$$

$$y = \frac{-a_2x - c_2}{b_2} \quad (4)$$

- se igualan las ecuaciones (3) y (4), ya que el valor de y debe ser el mismo en ambas;

$$\frac{-a_1x - c_1}{b_1} = \frac{-a_2x - c_2}{b_2} \quad (5)$$

La ecuación (5) es una ecuación lineal en la variable x . Se resuelve esta ecuación para hallar el valor de x .

- El valor encontrado de x se reemplaza en la ecuación (3) o en la (4) para hallar el valor correspondiente de y , así se obtiene el par (x, y) que es solución del sistema.

Ejemplo: Resolver, en caso de ser posible, el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Llamando (1) y (2) a la primera y segunda ecuación respectivamente, despejamos y de ambas

$$y = 2 - \frac{1}{2}x \quad (3)$$

$$y = 2x - 3 \quad (4)$$

Igualando (3) y (4) se tiene:

$$2 - \frac{1}{2}x = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{5}{2}x \Rightarrow x = 2$$

Este valor de x se reemplaza en (3) y se obtiene $y = 1 \Rightarrow$ el sistema tiene una solución.

$$C_s = \{(2, 1)\}$$

2) Método de Sustitución:

Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Se despeja una variable en ambas ecuaciones, por ejemplo la variable y de (1)

$$y = \frac{-a_1x - c_1}{b_1} \quad (3)$$

- se sustituye (3) en la ecuación (2)

$$a_2x + b_2\left(\frac{-a_1x - c_1}{b_1}\right) + c_2 = 0 \quad (4)$$

- La ecuación (4) es una ecuación lineal en la variable x. se resuelve esta ecuación para obtener el valor de x. Al valor encontrado de x se lo reemplaza en (3) para obtener el valor correspondiente de y, obteniendo así el par (x,y)

Ejemplo: Resolver, en caso de ser posible, el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Llamando (1) y (2) a la primera y segunda ecuación respectivamente, se despeja y de la primera ecuación $y = 2 - \frac{1}{2}x$ (3)

Se reemplaza (3) en la ecuación (2) $\Rightarrow 2x - (2 - \frac{1}{2}x) - 3 = 0$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x - 5 = 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Reemplazando este valor en (3) se tiene } y = 1 \Rightarrow$$

$$C_s = \{(2,1)\}$$

3) Método de Reducción:

Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Se multiplica la ecuación (1) por b_2 y la ecuación (2) por $-b_1$

$$\begin{cases} b_2(a_1x + b_1y + c_1) = b_2 \cdot 0 & (1) \\ -b_1(a_2x + b_2y + c_2) = -b_1 \cdot 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 & (3) \\ -b_1a_2x - b_1b_2y - b_1c_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

- Se suma ambas ecuaciones y resulta: $(b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2) \cdot x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$

Esta ecuación es lineal en la variable x, entonces se resuelve para obtener el valor de x

- Se trabaja de manera similar para obtener una ecuación lineal en la variable y así obtener su valor.

Ejemplo: Resolver, en caso de ser posible, el siguiente sistema por el método de reducción;

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Se llama (1) y (2) a la primera y segunda ecuación respectivamente

- Se multiplica la ecuación (1) por -1 y la ecuación (2) por -2

$$\begin{cases} -x - 2y + 4 = 0 \\ -4x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

- Se suma ambas ecuaciones $\Rightarrow -5x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$

- Se multiplica la ecuación (1) por -2 $\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y + 8 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

- Se suman ambas ecuaciones $\Rightarrow -5y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C_s = \{(2,1)\}$

4) Método de Determinantes:

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

-Se llama $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ con $\Delta \neq 0$

-Se llama $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$

-Se llama $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Ejemplo: Resolver, en caso de ser posible, el siguiente sistema por el método de

determinantes; $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2 \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1 \quad \Rightarrow C_s = \{(2,1)\}$$

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones

De acuerdo al tipo de solución que tiene un sistema de ecuaciones, se clasifica de la siguiente manera:

1) Compatible: sistema que tiene solución. Existen dos tipos dentro de este grupo

a) Compatible Determinado: La solución es única

b) Compatible Indeterminado: tiene infinitas soluciones

2) Incompatible: sistema que no tiene solución $\Rightarrow C_s = \emptyset$

Ejemplos: Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$

a) Este sistema se resolvió anteriormente y tiene solución única: $C_s = \{(2,1)\}$, por lo tanto es un sistema **Compatible Determinado**

b) Se resuelve por Sustitución: De la primera ecuación se despeja x, se reemplaza en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x &= -2y - 1 \\ 2(-2y - 1) + 4y + 2 &= 0 \\ -4y - 2 + 4y + 2 &= 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

lo cual es cierto para cualquier valor de y, por lo tanto existen infinitas soluciones, y el conjunto solución se expresa así:

$C_s = \{(-2-y, y)\}$. Es un sistema **Compatible Indeterminado**

c) Se resuelve por Sustitución: De la primera ecuación se despeja x, se reemplaza en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y \\ 2(4 - 2y) + 4y - 4 &= 0 \\ 8 - 4y + 4y - 4 &= 0 \Rightarrow 4 = 0 \end{aligned}$$

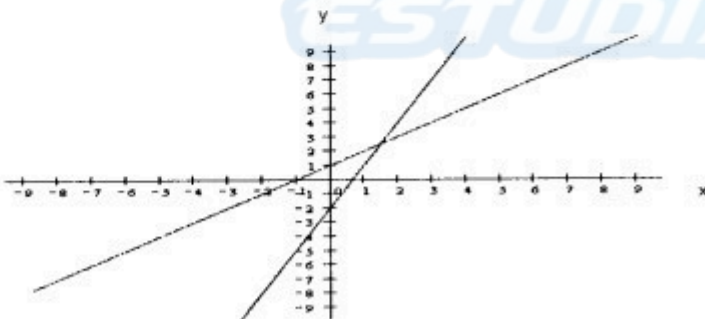
lo que no tiene sentido, es decir que el sistema no tiene solución: $C_s = \emptyset$. Es un sistema **Incompatible**.

Método Gráfico de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables:

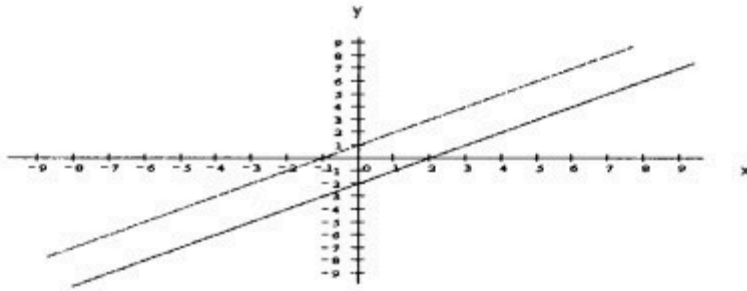
Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = a_1x + b_1 & (1) \\ y = a_2x + b_2 & (2) \end{cases}$

Cada ecuación del sistema corresponde a la ecuación de una recta, por lo que resolver el sistema significa encontrar el o los puntos que pertenecen a ambas rectas, es decir hallar las coordenadas del punto intersección de las rectas a partir de sus gráficas.

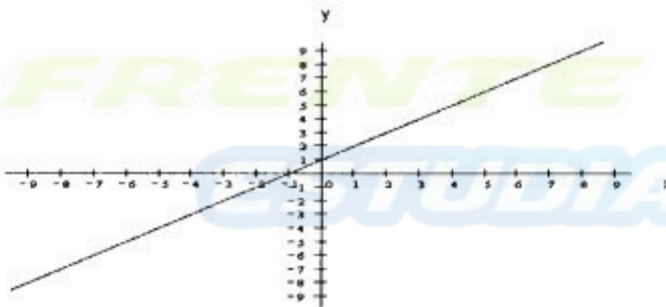
- Si las rectas se cortan en un punto el sistema tiene solución única, es Compatible Determinado.



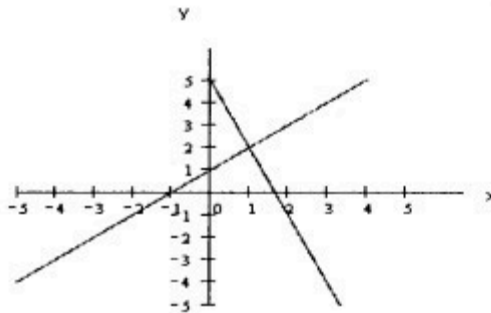
- Si las rectas son paralelas, no se cortan en ningún punto, el sistema no tiene solución, es Incompatible



- Si las rectas coinciden el sistema tiene infinitas soluciones, es Compatible Indeterminado



Ejemplo: Resolver gráficamente el siguiente sistema $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$



Las rectas se cortan entonces es un sistema compatible determinado $\Rightarrow C_s = \{(1,2)\}$

Aplicaciones

Problemas de diversos tipos pueden resolverse mediante el planteo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Ejemplos:

1) La suma de un número más el duplo de otro es 11, y el duplo del primero menos el segundo es 2. ¿Cuáles son los números?

Sea x el primer número, sea y el segundo número, entonces se tiene:

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{de la primera ecuación } x = 11 - 2y, \text{ reemplazando en la otra:}$$

$$2(11 - 2y) - y = 2 \Rightarrow 22 - 4y - y - 2 = 0 \Rightarrow -5y + 20 = 0 \\ \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Rta: Los números buscados son 3 y 4

2) Los jornales de un operario y su ayudante son 7 \$ y 3 \$ por hora respectivamente. Entre ambos efectúan un trabajo por el cual reciben la suma de 53 \$.

Si los jornales fueran de 1 \$ menos por hora, habrían cobrado 42 \$. Hallar el tiempo que trabajó cada uno de ellos.

Sea p = tiempo en hs. que trabajó el operario

h = tiempo en hs. que trabajó el ayudante

$$\begin{cases} 7p + 3h = 53 \\ 6p + 2h = 42 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{53}{7} - \frac{3}{7}h \Rightarrow 6\left(\frac{53}{7} - \frac{3}{7}h\right) + 2h = 42$$

$$\Rightarrow \frac{318}{7} - \frac{18}{7}h + 2h = 42 \Rightarrow -\frac{4}{7}h = -\frac{24}{7} \Rightarrow h = 6 \Rightarrow p = 5$$

Rta: El operario trabajó 5 horas y el ayudante trabajó 6 horas.

UNIDAD IV

Ecuación, Inecuación y Función Cuadrática

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Sea x una variable real. Se llama ecuación cuadrática en x , o ecuación de 2º grado en una variable a la ecuación de la forma: $a x^2 + b x + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

$a x^2$ es el término cuadrático

$b x$ es el término lineal

c es el término independiente

de acuerdo a los valores de a, b, c las ecuaciones cuadráticas pueden ser:

a) Completas: Si a, b, c no son nulos $\Rightarrow a x^2 + b x + c = 0$

b) Incompletas: $\begin{cases} b \text{ y } c \text{ son } 0 \Rightarrow \text{la ecuación queda } a x^2 = 0 \\ c = 0 \Rightarrow \text{la ecuación queda } a x^2 + b x = 0 \\ b = 0 \Rightarrow \text{la ecuación queda } a x^2 + c = 0 \end{cases}$

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas: Resolver una ecuación cuadrática significa encontrar sus dos raíces, a las que se denominan x_1 y x_2

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas Incompletas:

1) Caso $b=0$ y $c=0$

$$a x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \div a \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{raíz doble igual a } 0$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

Ejemplo: $-4 x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

2) Caso $c=0$

$$a x^2 + b x = 0 \Rightarrow x(a x + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -b/a \Rightarrow \text{2 raíces}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -b/a$$

Ejemplo: $4 x^2 + 2 x = 0 \Rightarrow x(4 x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1/2$
 $\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1/2$

3) Caso $b=0$

$$a x^2 + c = 0 \Rightarrow a x^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow \text{2 raíces}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo: $4 x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4 x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 16/4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

Resolución de la Ecuación Cuadrática Completa: $ax^2 + bx + c = 0$

Ocuparemos el siguiente método que se llama **completar cuadrados**:

1. El coeficiente principal debe ser 1. Entonces sacando factor común a , obtenemos la ecuación equivalente $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$.
2. Siendo $a \neq 0$, sabemos que la ecuación anterior es equivalente a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
3. Dividimos por 2 al coeficiente que acompaña al término lineal (b/a), y elevamos al cuadrado el resultado. A continuación, sumamos y restamos el cuadrado obtenido.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Aplicamos la propiedad conmutativa y asociativa.

$$\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + \left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = 0$$

Sacamos factor común (-) en el 2º término

$$\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right] = 0$$

Aplicamos trinomio cuadrado perfecto en el 1º término

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left[\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right] = 0$$

Operamos algebraicamente

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Por diferencia de cuadrados

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right] = 0$$

Encontramos dos ecuaciones lineales cuyas soluciones son las raíces de la ecuación cuadrática.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \quad \text{o} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0$$

Al resolver estas últimas ecuaciones obtenemos:

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0$$

$$x - \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación cuadrática se pueden obtener aplicando la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos de Diferentes Casos:

Resolver por el método de completar cuadrados y luego aplicando directamente la fórmula, la siguiente ecuación:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

1º) Completando cuadrados:

Sumar 1 en ambos miembros $x^2 + 2x - 3 + 1 = 0 + 1$
 $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 1 + 3$
 $\Rightarrow (x + 1)^2 = 4$
 $\Rightarrow x + 1 = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -3$

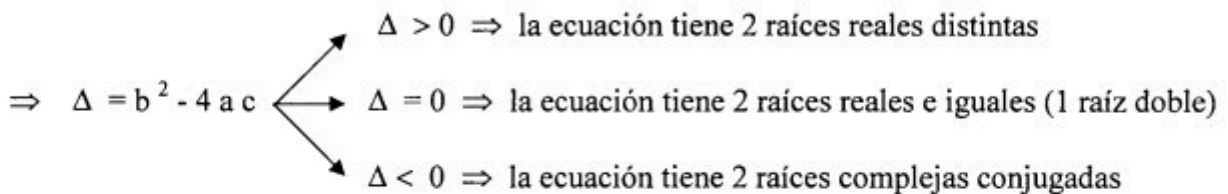
2º) Aplicando fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -3$$

Clasificación de las Raíces:

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama Discriminante y lo denotamos con Δ



Relación entre Raíces y Coeficientes de una Ecuación Cuadrática

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

sus raíces son $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

1º) Si sumamos ambas raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -b/a$$

2º) Si multiplicamos ambas raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 \cdot x_2 = c/a}$$

Expresión de la Ecuación Cuadrática en Función de sus Raíces

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Dividimos por a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Como $x_1 + x_2 = -b/a$

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

$$\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Multiplicando por a:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

\Rightarrow **Ecuación Cuadrática Factorizada**

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

Ejemplos:

Expresar las siguientes ecuaciones cuadráticas en forma factorizada:

a) $2x^2 + x - 3 = 0$

Utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

Forma factorizada: $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

b) $x^2 + x - 2 = 0$

Utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

Forma factorizada: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

Ecuaciones Bicuadradas:

Se llama ecuación bicuadrada a toda ecuación de cuarto grado en la que figuran solamente los términos de exponente par: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se reemplaza $z = x^2$, para trabajar con la ecuación cuadrática: $az^2 + bz + c = 0$

Se aplica la fórmula y se encuentra z_1 y z_2 .

Como $z = x^2 \Rightarrow$

$$z_1 = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$$

$$z_2 = x^2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2} \quad \text{de allí se obtienen las 4 raíces de la ecuación.}$$

Ejemplo: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2}$

$$z_1 = 4 \quad \text{y} \quad z_2 = 1 \Rightarrow \begin{aligned} x_{1,2} &= \pm 2 \\ x_{3,4} &= \pm 1 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $C_s = \{-2, -1, 1, 2\}$

INECUACIONES CUADRÁTICAS

Son inecuaciones del tipo:

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Para resolver este tipo de inecuaciones se factoriza el primer miembro de modo que quede $a(x - x_1)(x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

De esta manera, se aplicará la regla de los signos para determinar el conjunto solución.

Ejemplos:

a) Hallar el conjunto solución de $2x^2 + 4x < 0$

Factorizando se tiene: $2x(x + 2) < 0$

Como el producto debe ser negativo, se presentan dos casos:

1) $x > 0 \wedge x + 2 < 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x < -2 \Rightarrow C_{s1} = \emptyset$

2) $x < 0 \wedge x + 2 > 0 \Rightarrow x < 0 \wedge x > -2 \Rightarrow C_{s2} = (-2, 0)$

El conjunto solución es la unión de ambos: $C_s = C_{s1} \cup C_{s2} = \emptyset \cup (-2, 0) = (-2, 0)$

b) Hallar el conjunto solución de $x^2 + x - 2 > 0$

La expresión factorizada es: $(x - 1)(x + 2) > 0$

Como el producto debe ser positivo, se presentan dos casos:

1) $x - 1 > 0 \wedge x + 2 > 0 \Rightarrow x > 1 \wedge x > -2 \Rightarrow C_{s1} = (1, \infty)$

2) $x - 1 < 0 \wedge x + 2 < 0 \Rightarrow x < 1 \wedge x < -2 \Rightarrow C_{s2} = (\infty, -2)$

El conjunto solución es la unión de ambos: $C_s = (\infty, -2) \cup (1, \infty)$

Si $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces complejas entonces la expresión cuadrática será siempre mayor que cero o menor que cero, dependiendo del signo del coeficiente principal.

1. Si $a > 0$ entonces $ax^2 + bx + c > 0$
2. Si $a < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0$

Ejemplos:

a) Hallar el conjunto solución de $x^2 + x + 1 > 0$

La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ tiene raíces complejas, ya que el discriminante es negativo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

Como $a > 0$, resulta que $x^2 + x + 1$ será siempre positivo.

Es decir, la inecuación se verifica para cualquier valor de x .

Por lo tanto, el conjunto solución es $D_s = \mathbb{R}$

b) Hallar el conjunto solución de $x^2 + x + 1 < 0$

En el inciso anterior se vio que $x^2 + x + 1$ resulta siempre positivo. Pero ahora se pide que esa expresión sea negativa. Como no existen valores de x que hagan que se cumpla la inecuación, resulta que el conjunto solución es $C_s = \emptyset$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

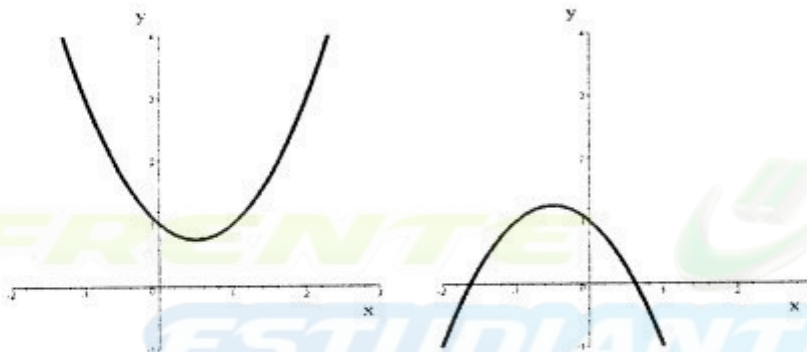
Una función cuadrática es una función polinómica de 2º grado que tiene la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Completando cuadrados se puede llevar la expresión anterior a su forma canónica:

$$(x - h)^2 = \frac{1}{a}(y - k) \quad (1)$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola



- Si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, o sea que su concavidad es positiva
- Si $a < 0$ la parábola se abre hacia abajo, o sea que su concavidad es negativa

- Dominio de la función: $D_f = \mathbb{R}$

Intersección con los ejes:

- Intersección con el eje y: se hace $x = 0$ en (1) $\Rightarrow y = c$, por lo tanto el punto de intersección con el eje y es $(0, c)$

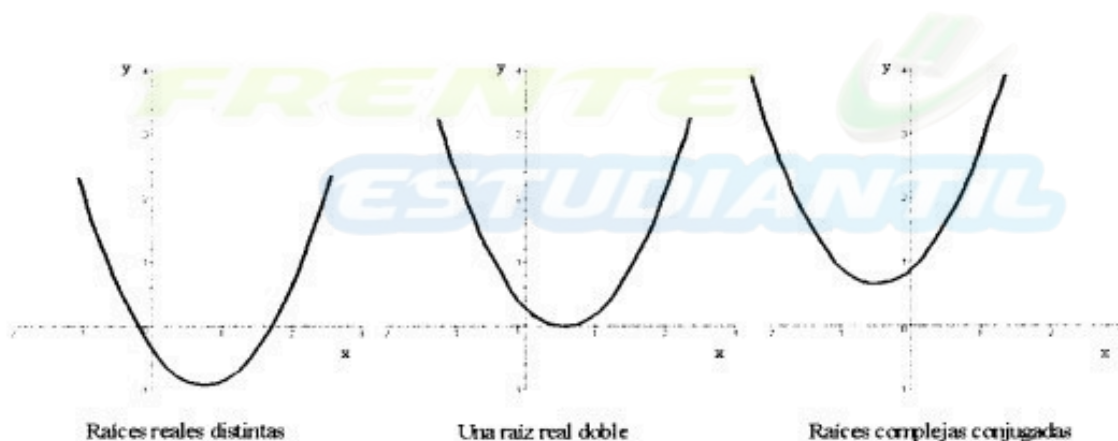
- Intersección con el eje x: se hace $y = 0$ en (1) $\Rightarrow a x^2 + b x + c = 0$, por lo tanto los valores de las raíces de esta ecuación cuadrática son los valores donde la parábola corta al eje x:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

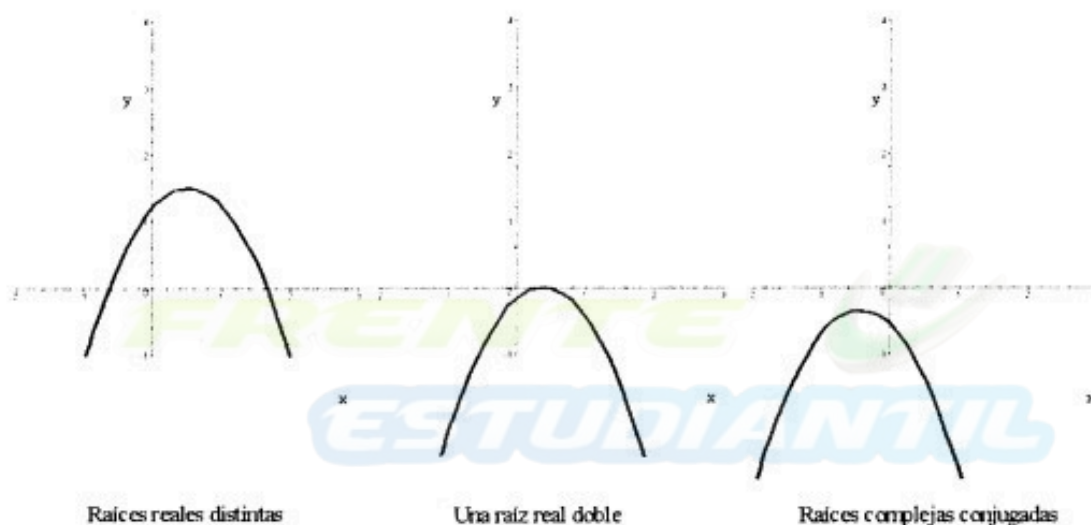
Como el valor de las raíces dependen del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, entonces la intersección con el eje x depende del valor de Δ :

- 1) Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 raíces reales distintas \Rightarrow hay 2 puntos de intersección con el eje x
- 2) Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 raíz real doble \Rightarrow hay 1 punto de intersección con el eje x
- 3) Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 raíces complejas conjugadas \Rightarrow no hay puntos de intersección con el eje x

$a > 0$



$a < 0$



Vértice de la parábola: Es el punto donde la parábola alcanza su máximo valor (si $a < 0$) o su mínimo valor (si $a > 0$).

Para hallar las coordenadas del vértice $V = (h, k)$ se completa cuadrados en la variable x:

$$y = a x^2 + b x + c$$

sacando factor comun a: $y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

sumando y restando $\left(\frac{b}{2a} \right)^2$ se tiene: $y = a \left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$

$$y = a \left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$\text{entonces } h = -\frac{b}{2a} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

Eje de simetría: El eje de simetría de una función cuadrática es una recta paralela al eje y, que pasa por el vértice, entonces su ecuación es: $x = -\frac{b}{2a}$

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

Si $a > 0$, la función crece en el intervalo $[h, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, h]$

Si $a < 0$, la función crece en el intervalo $(-\infty, h]$ y decrece en el intervalo $[h, \infty)$

Imagen:

Si $a > 0$ entonces la imagen es $I_m = [k, \infty)$

Si $a < 0$ entonces la imagen es $I_m = (-\infty, k]$

Ejemplo: Representar gráficamente la función $y = x^2 - 2x - 3$, indicando: dominio, intersección con los ejes coordenados, coordenadas del vértice, eje de simetría, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, e imagen. Expresar la ecuación en su forma canónica y en su forma factorizada.

Como $a = 1 > 0$ la parábola tiene concavidad positiva, entonces tendrá un mínimo en el vértice.

El dominio de la función es $D_f = \mathbb{R}$

Intersecciones: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

Vértice:

$$\Rightarrow (3, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = -4 \Rightarrow V = (1, -4)$$

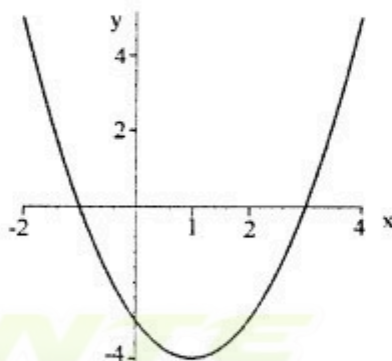
Eje de simetría: $x = 1$

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

Como $a > 0$, la función crece en el intervalo $[1, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 1]$

Imagen:

Como $a > 0$ entonces la imagen es $I_m = [-4, \infty)$



Forma Canónica de la Ecuación de la Parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y + 3 = x^2 - 2x$$

$$y + 3 + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$y + 4 = (x - 1)^2$$

\Rightarrow

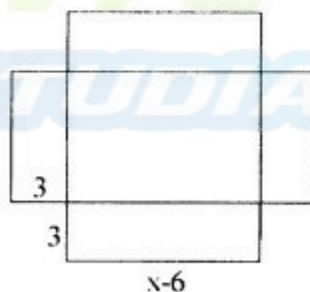
$$(x - 1)^2 = (y + 4)$$

Forma Factorizada de la Ecuación Cuadrática: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Como las raíces son $x_1 = 3$ $x_2 = -1$ \wedge $a = 1 \Rightarrow y = (x - 3)(x + 1)$

Aplicaciones:

1) Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de hacerse de una pieza de hoja de lata, quitándose 9 cm^2 de cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Si la caja debe tener 48 cm^3 , ¿cuál es el tamaño de la pieza de hoja de lata que deberá usarse?



L: longitud de la base de la caja

x: lado de la hoja de lata

volumen: $48 \text{ cm}^3 = L \cdot L \cdot \text{altura}$

$$48 \text{ cm}^3 = (x-6)^2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow 16 = (x-6)^2 \Rightarrow x-6 = \pm 4 \Rightarrow x = 10 \text{ y } x = 2$$

Análisis del resultado: $x = 2$ no responde al problema planteado (¿Por qué?), por lo tanto la solución es $x = 10 \text{ cm}$.

Rta: Se debe usar una hoja de lata cuadrada de 10 cm de lado.

2) Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba. La posición y (en metros) respecto del suelo en función del tiempo t (en segundos) viene dada por $y = 20t - 5t^2$.

a) Hallar los instantes en los cuales el objeto está a una distancia de 15 m

b) Determinar si el objeto llega a alcanzar una altura de 25 m

a) $15 = 20t - 5t^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow t = 3 \text{ y } t = 1$

Rta: en 1 seg. y a los 3 seg, cuando sube y baja, se encuentra a 15 m.

b) $25 = 20t - 5t^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow$ no tiene solución real

Rta: no alcanza una altura de 25 m

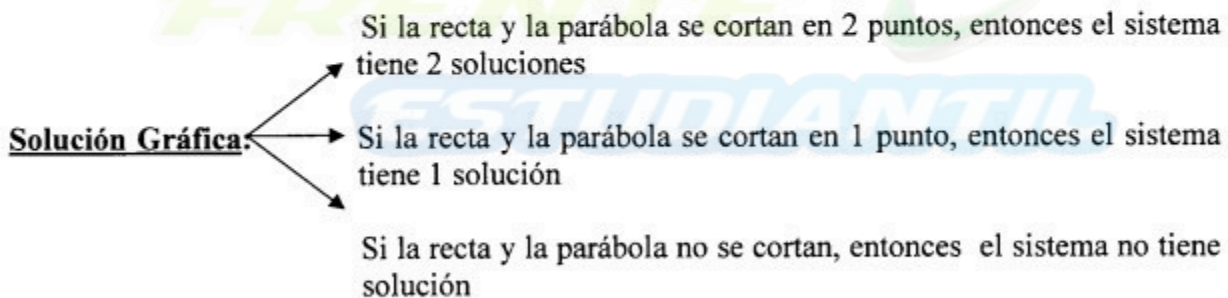
SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones no lineales es aquel en el que alguna de las ecuaciones no es de primer grado. Resolver dicho sistema es encontrar el valor de las variables que verifican simultáneamente todas las ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones no lineal, donde una ecuación es lineal y la otra de 2º grado se puede resolver por los métodos de sustitución o igualación o bien gráficamente, es decir obteniendo los puntos de intersección de la parábola y la recta.

Cuando se resuelve analíticamente, se llega a una ecuación cuadrática, con todos los resultados posibles vistos para estas ecuaciones:

- Dos raíces reales distintas: la recta y la parábola se cortan en 2 puntos
- Una raíz real doble: la recta y la parábola se cortan en 1 punto
- Dos raíces complejas conjugadas: la recta y la parábola no se cortan



Ejemplo: Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Analíticamente

Resolvemos por sustitución; se reemplaza la primera ecuación en la segunda:

$$x^2 - 4x + 3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = 1$$

se reemplazan estos valores en la primera ecuación y se obtiene $y_1 = 3$ $y_2 = 0$

por lo tanto hay dos soluciones : **(4, 3)** y **(1, 0)**

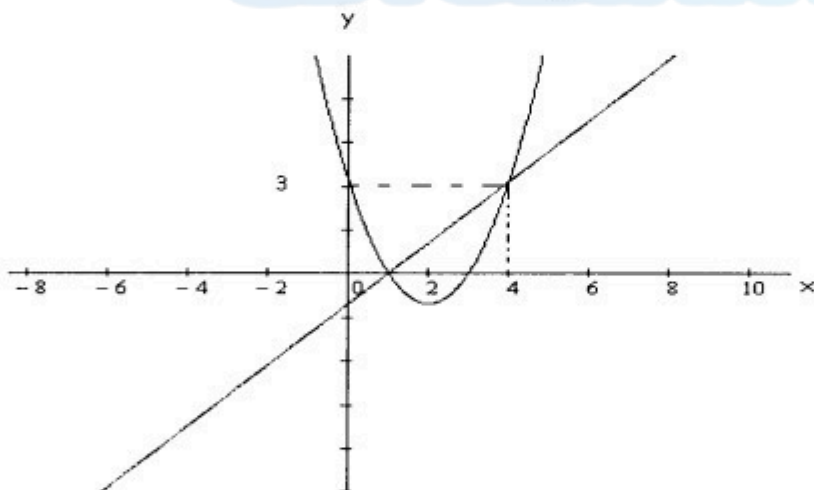
Gráficamente

Se grafica: la recta $y = x - 1$ de pendiente 1 y ordenada al origen -1

la parábola $y = x^2 - 4x + 3$ $V = (2, -1)$, eje de simetría $x = 2$, concavidad positiva

Intersección con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 3$

$$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$



\Rightarrow Solución: **(4, 3)** y **(1, 0)**

UNIDAD V

Funciones: Exponencial, Logarítmica y Trigonométricas

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Definición: Una función de la forma $y = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}$, se llama función exponencial.

El número a se llama base de la función exponencial.

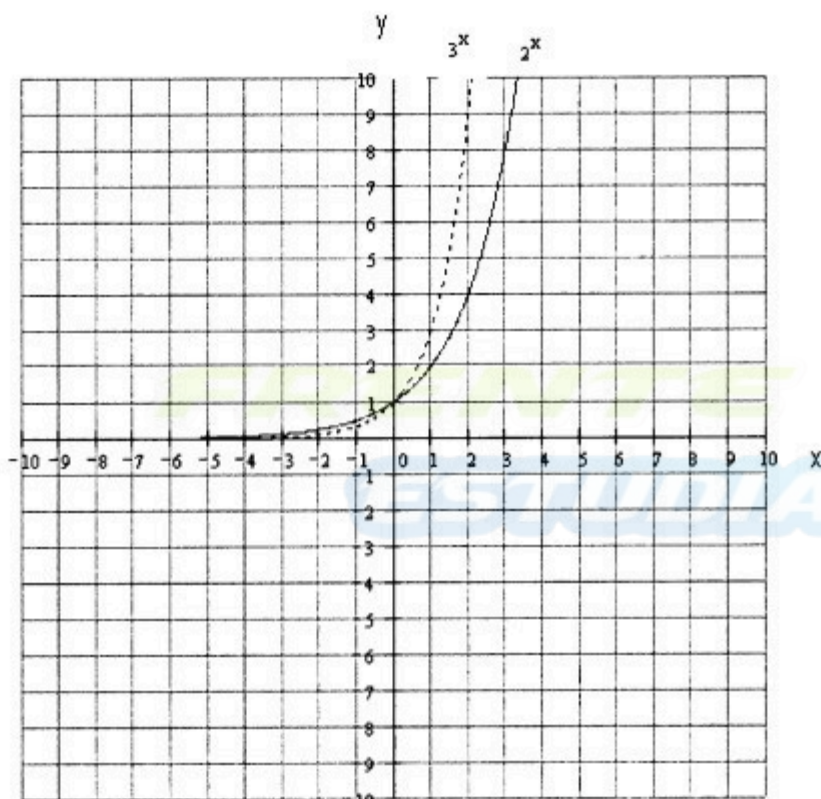
El Dominio de esta función es \mathbb{R} y la Imagen de la función es $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

- Si $a > 1$ la función es creciente
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.

Gráfica de la función exponencial:

1º) **Primer caso:** $a > 1$. Consideremos los siguientes ejemplos: $y_1 = 2^x$, $y_2 = 3^x$

| x | $y_1 = 2^x$ | $y_2 = 3^x$ |
|----|---------------|----------------|
| 3 | 8 | 27 |
| 2 | 4 | 9 |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 1 |
| -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
| -2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ |
| -3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ |



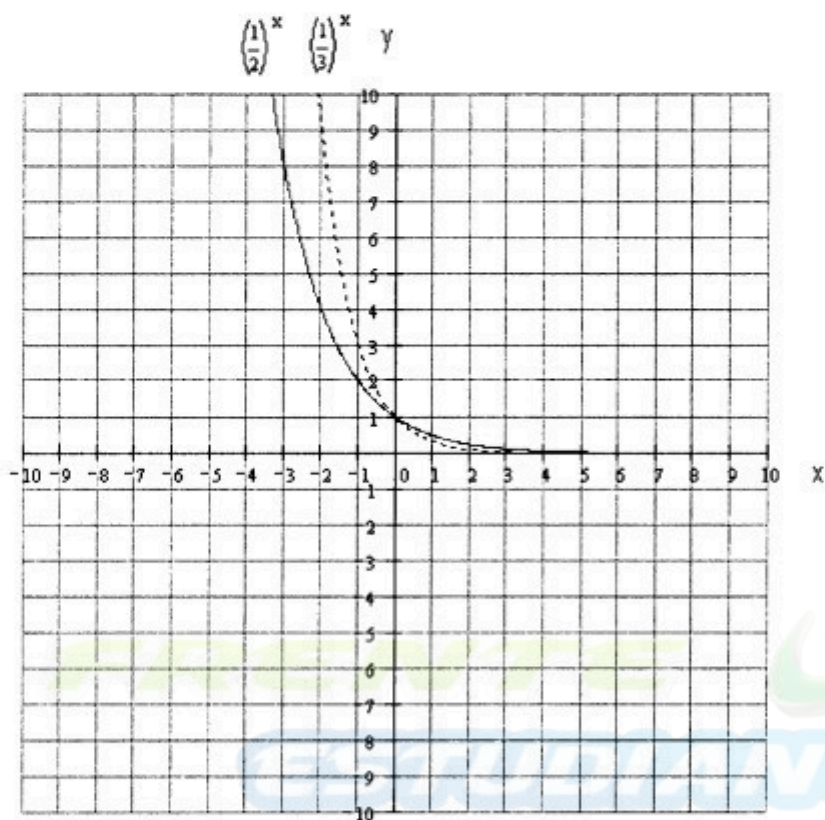
Observaciones: para $a > 1$

- Si el exponente es positivo ($x > 0$) $\Rightarrow y > 1$
- Si el exponente es negativo ($x < 0$) $\Rightarrow 0 < y < 1$
- Si el exponente es cero ($x = 0$) $\Rightarrow y = 1$
- Si aumenta x , entonces aumenta y , la función es creciente.

2º) Segundo caso: $0 < a < 1$. Consideremos los siguientes ejemplos:

$$y_1 = (1/2)^x, \quad y_2 = (1/3)^x$$

| x | $y_1 = (1/2)^x$ | $y_2 = (1/3)^x$ |
|----|-----------------|-----------------|
| 3 | 1/8 | 1/27 |
| 2 | 1/4 | 1/9 |
| 1 | 1/2 | 1/3 |
| 0 | 1 | 1 |
| -1 | 2 | 3 |
| -2 | 4 | 9 |
| -3 | 8 | 27 |



Observaciones: para $0 < a < 1$

- Si el exponente es positivo ($x > 0$) $\Rightarrow 0 < y < 1$
- Si el exponente es negativo ($x < 0$) $\Rightarrow y > 1$
- Si el exponente es cero ($x = 0$) $\Rightarrow y = 1$
- Si aumenta x , entonces disminuye y , la función es decreciente.

El número e: Hemos definido la función exponencial de la forma $y = a^x$, vimos que los gráficos de esas funciones pasan todas por el punto (0,1), pero cuando “a” varía las rectas tangentes determinan distintos ángulos con el eje x. Solamente existe una de estas gráficas cuya recta tangente en el punto (0,1) forma un ángulo de 45° con el eje x. La función correspondiente es $y = e^x$, siendo e un número irracional cuyo valor aproximado es $e = 2,718281\dots$

Esta función tiene muchas aplicaciones, por ejemplo:

- a) $P = P_0 e^{kt}$ para el crecimiento de la población mundial
- b) $N = N_0 e^{-kt}$ para la desintegración de una sustancia radiactiva
- c) $C = k e^{-x^2/2}$ para la distribución normal de cualquier variable aleatoria

Función Exponencial: Distintos Tipos

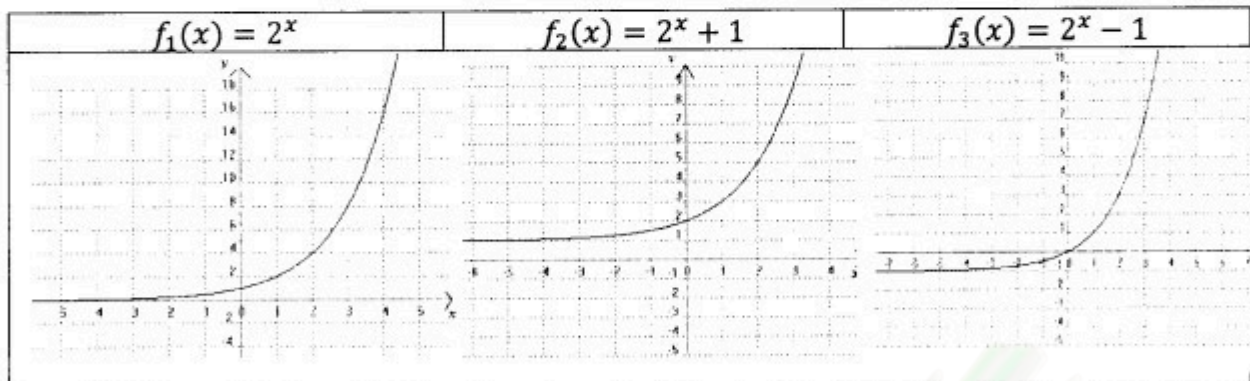
Existen otras funciones que involucran a la función exponencial. Entre ellas, distinguiremos los siguientes casos.

a) Funciones del Tipo $g(x) = a^x + b$

La función exponencial se desplaza b unidades hacia arriba si $b > 0$, ó b unidades hacia abajo, si $b < 0$.

$$D_g = \mathbb{R} \quad y \quad I_g = (b,)$$

Para obtener una mejor visualización de la influencia del parámetro b, a continuación graficaremos las funciones $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x + 1$, $f_3(x) = 2^x - 1$ y dadas las gráficas determina el dominio y la imagen de cada función.

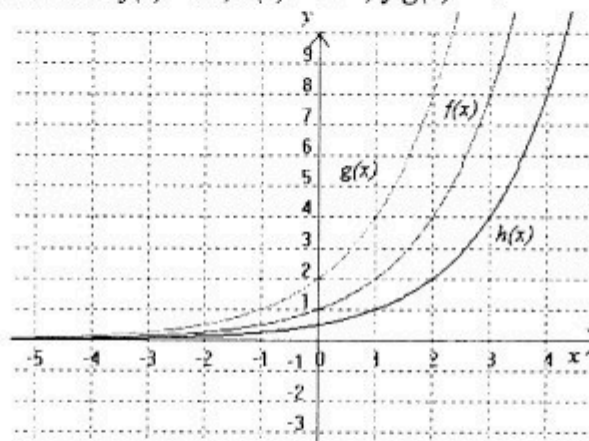


b) Funciones del Tipo $g(x) = a^{x+c}$

La función exponencial se desplaza c unidades hacia la derecha si c negativo, ó c unidades hacia la izquierda, si c es positivo.

$$D_g = \mathbb{R} \quad y \quad I_g = (0,)$$

Ejemplos: Grafica las funciones $f(x) = 2^x$, $h(x) = 2^{x-1}$, y $g(x) = 2^{x+1}$



Nota: Así como hemos analizado la incidencia de los parámetros cuando se suma un número tanto a la función, ó bien al exponente, también es necesario analizar la incidencia que se produce en la gráfica de las funciones cuando se multiplica un parámetro, es decir en funciones del tipo

$g(x) = a^{dx}$ y $h(x) = ka^x$. Para ello es necesario darle valores a los parámetros d y k para determinar cuál es la incidencia que estos producen a funciones de la forma $f(x) = a^x$

LOGARITMO

Definición: Se llama logaritmo en base a de un número b a otro número x , tal que a elevado al número x es igual a b .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \text{con } a > 0, b > 0 \wedge a \neq 1$$

Propiedades del logaritmo:

- 1) $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$
- 2) Propiedad uniforme: $x = y \Rightarrow \log_a x = \log_a y$
- 3) Propiedad cancelativa: $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$
- 4) Logaritmo de un producto: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- 5) Logaritmo de un cociente: $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
- 6) Logaritmo de una potencia: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- 7) Logaritmo de una raíz: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- 8) $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$
- 9) $\log_a a^n = n$
- 10) $a^{\log_a n} = n$

Logaritmos Decimales y Logaritmos Nepperianos o Naturales

1º) Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos de base 10, es decir $\log_{10} x$.

En estos casos no se escribe la base, se expresa $\log x$ y se lee "logaritmo decimal de x "

2°) Se llaman logaritmos naturales o neperianos a los logaritmos de base e, es decir $\log_e x$. A estos logaritmos se los expresa así: $\ln x$ o Lx , se lee "logaritmo natural de x" o "logaritmo neperiano de x".

Cambio de base: Si se quiere pasar de $\log_a x$ a $\log_b x$ se usa la siguiente fórmula:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Demostración: Sea $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$

Aplicando \log_b en ambos miembros $\Rightarrow \log_b a^y = \log_b x$

$$\Rightarrow y \log_b a = \log_b x$$

Despejando y $\Rightarrow y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ como $y = \log_a x \Rightarrow \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplo: La vida media de cierta sustancia radiactiva es de 1000 años. Si se tiene una muestra de 2 grs., ¿cuántos gramos quedarán al cabo de 5000 años?

Se sabe que la fórmula para la desintegración radiactiva es $N = N_0 e^{-kt}$, donde

N = cantidad que queda sin desintegrar en el tiempo t

N_0 = cantidad inicial

k = constante que depende de la sustancia

Datos: t_m = vida media. Es el tiempo que en nuestro ejemplo, ha transcurrido para que se desintegre la mitad de la sustancia inicial. Es decir, si $t = 1000$, entonces $N = 1$ gr.

$N_0 = 2$ grs (cantidad inicial)

$T = 5000$ años

Incógnitas: N , k (constante a determinar)

Solución: $N = 2 e^{-kt}$ (1)

Primero se obtiene el valor de k , $1 = 2 e^{-k1000} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-k1000}$

$\Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -1000k \Rightarrow \ln 2^{-1} = -1000k \Rightarrow -\ln 2 = -1000k \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{1000}$

Reemplazando en (1): $N = 2 e^{-\ln 2 \cdot t / 1000}$, si $t = 5000 \Rightarrow N = 2 e^{-\ln 2 \cdot 5000 / 1000}$

$$\Rightarrow N = 2 (e^{\ln 2})^{-5}$$

$$\Rightarrow N = 2 \cdot 2^{-5} = 0,0625 \text{ grs.}$$

Rta: La cantidad de sustancia reactiva al cabo de 5000 años será 0,0625 grs.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La inversa de la función exponencial es la función logarítmica y tiene la forma:

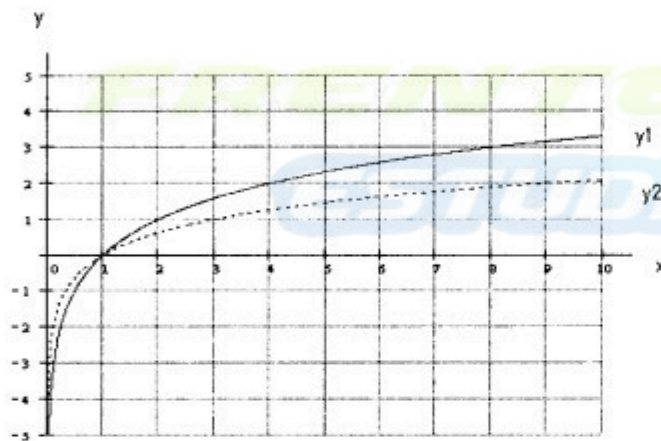
$$y = \log_a x \quad \text{con } a > 0 \wedge a \neq 1$$

El Dominio de la función logarítmica es $R^+ = (0, \infty)$ y la Imagen es R

Gráfica de la Función Logarítmica

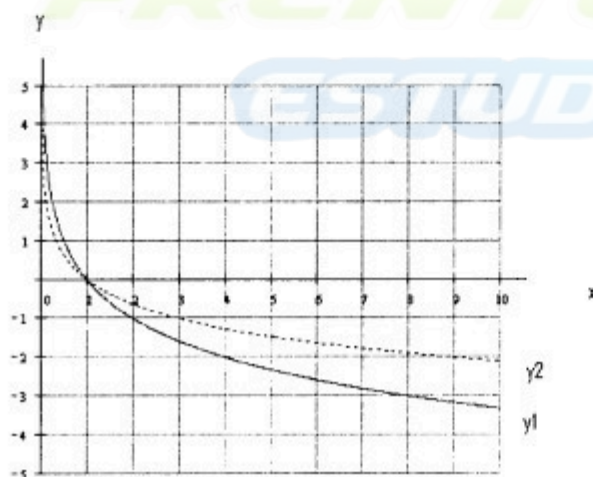
1º) Primer caso: $a > 1$. Consideremos los siguientes ejemplos: $y_1 = \log_2 x$, $y_2 = \log_3 x$

| X | $y_1 = \log_2 x$ | x | $y_2 = \log_3 x$ |
|-----|------------------|------|------------------|
| 8 | 3 | 27 | 3 |
| 4 | 2 | 9 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1/2 | -1 | 1/3 | -1 |
| 1/4 | -2 | 1/9 | -2 |
| 1/8 | -3 | 1/27 | -3 |



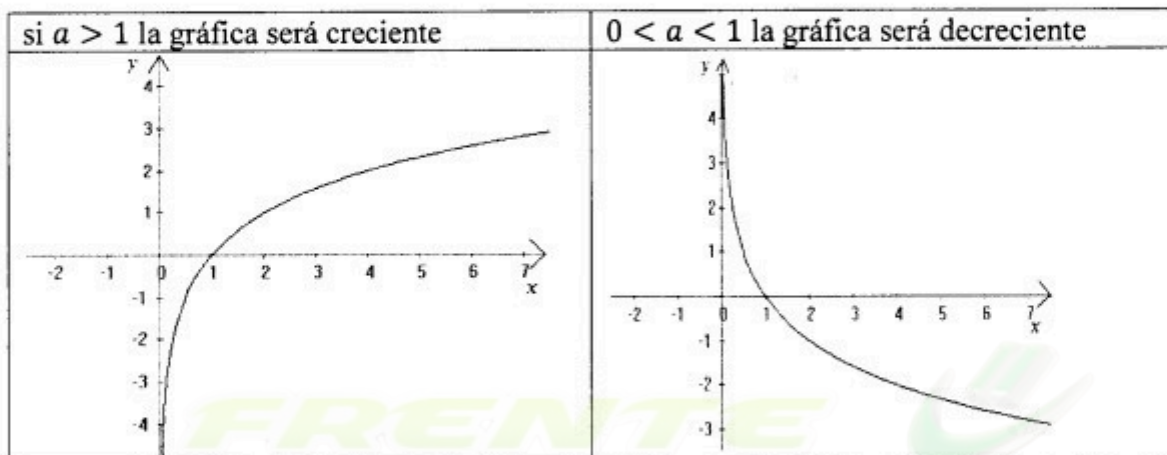
2º) Segundo caso: para $0 < a < 1$ Consideremos los siguientes ejemplos:
 $y_1 = \log_{1/2} x$, $y_2 = \log_{1/3} x$

| X | $y_1 = \log_{1/2} x$ | x | $y_2 = \log_{1/3} x$ |
|-----|----------------------|------|----------------------|
| 1/8 | 3 | 1/27 | 3 |
| 1/4 | 2 | 1/9 | 2 |
| 1/2 | 1 | 1/3 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | -1 | 3 | -1 |
| 4 | -2 | 9 | -2 |
| 8 | -3 | 27 | -3 |



La función logarítmica será decreciente $\forall x \in D_f$ si $0 < a < 1$.

La función logarítmica será creciente $\forall x \in D_f$ si $a > 1$.



Funciones Logarítmicas: Distintos Tipos

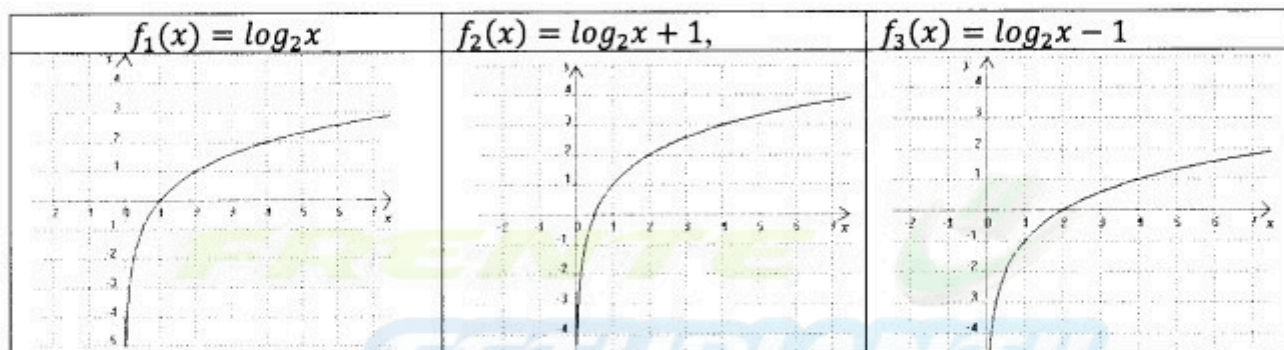
Existen otras funciones que involucran a la función logarítmica. Entre ellas, distinguiremos los siguientes casos.

a) Funciones del tipo $g(x) = \log_a x + b$

La función exponencial se desplaza b unidades hacia arriba si $b > 0$, ó b unidades hacia abajo, si $b < 0$.

$$D_g = (0, \infty) \quad y \quad I_g = \mathbb{R}$$

Para obtener una mejor visualización de la influencia del parámetro b , a continuación graficaremos las funciones $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = \log_2 x + 1$, $f_3(x) = \log_2 x - 1$, y dadas las gráficas determina el dominio y la imagen de cada función.

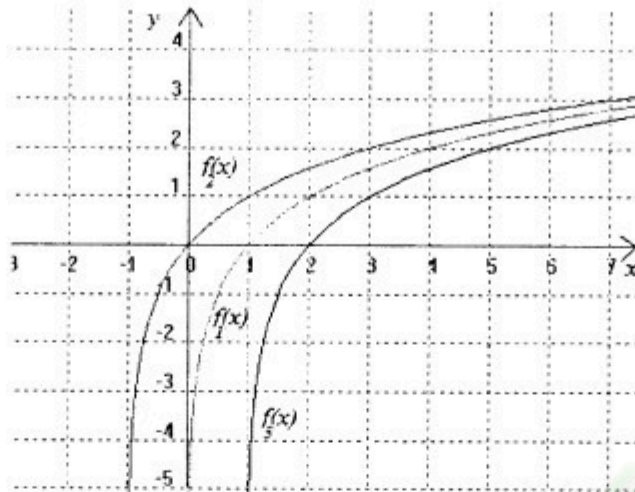


b) Funciones del tipo $g(x) = \log_a(x + c)$

La función exponencial se desplaza c unidades hacia la derecha si c negativo, ó c unidades hacia la izquierda, si c es positivo.

$$D_g = (-c, \infty) \quad y \quad I_g = \mathbb{R}$$

Ejemplos: Graficar las funciones $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = \log_2(x + 1)$, $f_3(x) = \log_2(x - 1)$



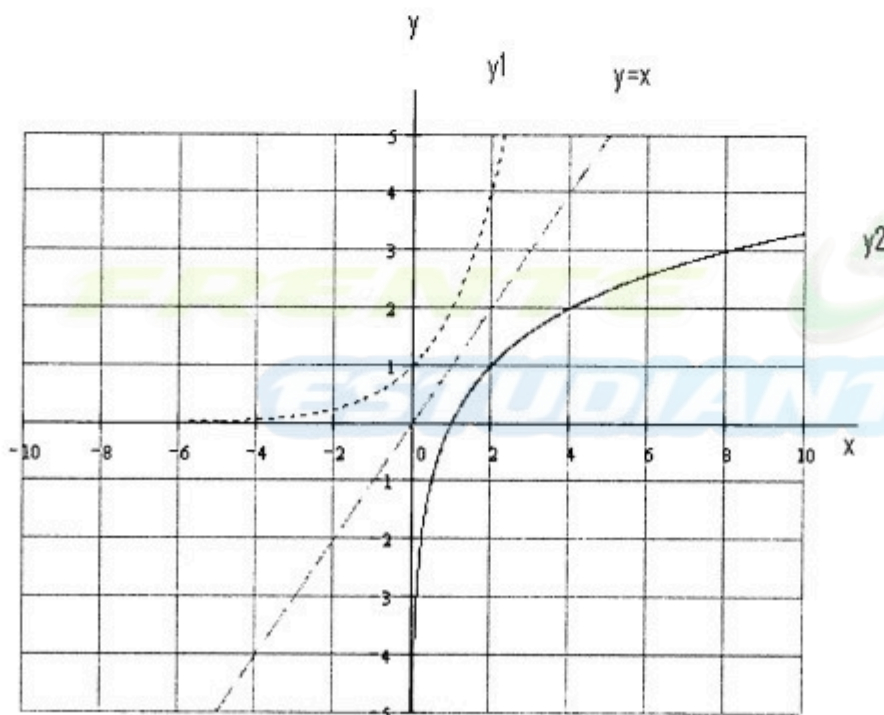
Nota: Así como hemos analizado la incidencia de los parámetros cuando se suma un número tanto a la función, ó bien al argumento, también es necesario analizar la incidencia que se produce en la gráfica de las funciones cuando se multiplica un parámetro, es decir en funciones del tipo

$g(x) = \log_a(dx)$ y $h(x) = k\log_a(x)$, para ello es necesario darle valores a los parámetros d y k para determinar cuál es la incidencia que estos producen a funciones de la forma $f(x) = \log_a x$

Gráfica de las Funciones Inversas

Como la función exponencial $y = a^x$ y la función logarítmica $y = \log_a x$ son inversas, sus gráficas son simétricas respecto a la recta bisectriz del primer cuadrante $y = x$

Ejemplo: $y_1 = 2^x$, $y_2 = \log_2 x$



Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Se muestra como ejemplo la manera de resolver algunas ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

1) $2 \log_3 x + 4 = 0$. Para resolver se despeja la expresión logarítmica:

$$\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} \Rightarrow x = 1/9$$

2) $\frac{1}{2} \cdot 2^x - 4 = 0$ Se despeja la expresión exponencial

$$2^x = 8 \Rightarrow x = \log_2 8 \Rightarrow x = 3$$

3) $2 \log_2^2 x - 17 \log_2 x + 8 = 0$ se sustituye $z = \log_2 x$

$$2z^2 - 17z + 8 = 0 \text{ se resuelve esta ecuación cuadrática y se obtiene } z_1 = \frac{1}{2} \quad z_2 = 8$$

Se sustituye z_1 y $z_2 \Rightarrow \log_2 x_1 = 1/2$

$$\log_2 x_2 = 8$$

por definición de log. $\Rightarrow x_1 = 2^{1/2}$ y $x_2 = 2^8 = 256 \Rightarrow C_s = \{ 2^{1/2}, 256 \}$

4) $3 \cdot 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$ Se sustituye $z = 3^x$, $z^2 = 3^{2x}$

$$3z^2 + 26z - 3 = 0 \text{ se resuelve esta ecuación cuadrática y se obtiene } z_1 = -3 \quad z_2 = 1/3$$

Se sustituye z_1 y $z_2 \Rightarrow 3^{x_1} = -3$ no tiene sentido porque la imagen de la función exponencial no puede ser negativa

$$\Rightarrow 3^{x_2} = 1/3 \Rightarrow x_2 = \log_3 1/3 \Rightarrow x_2 = -1 \text{ única solución}$$

5) $5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 8 = 0$

$$25 \cdot 5^x + 15 \cdot 5^x - 8 = 0$$

$$40 \cdot 5^x = 8 \Rightarrow 5^x = 1/5 \Rightarrow x = \log_5 1/5 \Rightarrow x = -1$$

6) $e^{-x} - 3 + 2e^{-x} = 0$

Para eliminar e^{-x} multiplicamos ambos miembros por e^x

$$(e^x)^2 + 2e^{-x} e^x - 3e^x = 0$$

$$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \text{ se sustituye } e^x = z$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \text{ se resuelve esta ecuación cuadrática y se obtiene } z_1 = 2 \quad z_2 = 1$$

$$\Rightarrow e^{x_1} = 2 \text{ y } e^{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = \ln 2 \text{ y } x_2 = \ln 1 \Rightarrow x_1 = 0,69314 \text{ y } x_2 = 0$$

Sistemas de Ecuaciones

Se resuelven por sustitución.

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} y - \log(x+3) = 1 & (1) \\ 2 - y = \log x & (2) \end{cases}$$

De (2) $y = 2 - \log x$, se sustituye en (1) $\Rightarrow 2 - \log x - \log(x+3) = 1$

Se aplica propiedades: $\Rightarrow 2 - \log[x \cdot (x+3)] = 1$

$$\Rightarrow \log[x \cdot (x+3)] = 1$$

$$\Rightarrow x \cdot (x+3) = 10$$

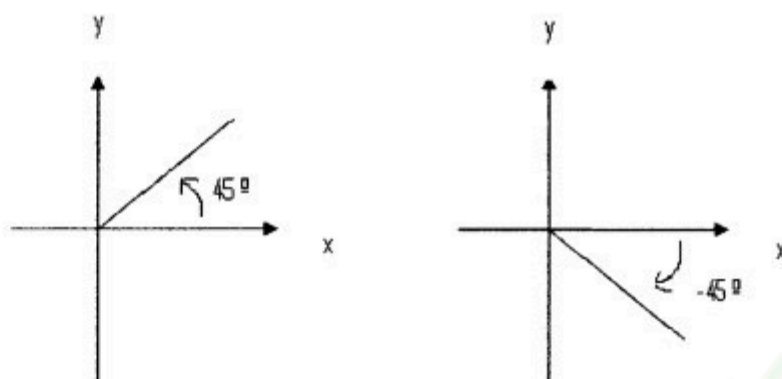
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = -5$ y $x_2 = 2$, pero -5 no está en el dominio de la función por lo tanto la única solución es $x = 2$

TRIGONOMETRÍA

Ángulos: Si se considera un ángulo en un sistema de coordenadas cartesianas, tendrá su vértice en el origen de coordenadas, y un lado sobre el eje x . Si se gira el otro lado se

obtienen distintos ángulos. El sentido de giro igual al de las agujas del reloj (horario) es negativo, el sentido de giro contrario a las agujas del reloj (antihorario) es positivo.



Sistemas de Medición de Ángulos:

1°) Sistema Sexagesimal: La unidad de medida es el grado sexagesimal, que se obtiene de dividir un ángulo recto en noventa partes iguales. Si se divide el grado en 60 partes iguales se obtiene un minuto, si se divide el minuto en 60 partes iguales se obtiene un segundo.

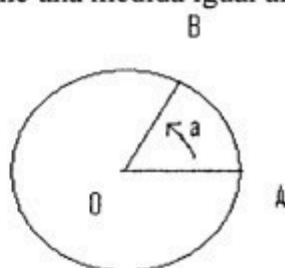
Notación del grado: °

Notación del minuto: ′

Notación del segundo: ″

Por ejemplo un ángulo de 30 grados, 25 minutos y 14 segundos se expresa: 30° 25′ 14″

2°) Sistema Circular: La unidad de medida es el radián. Un radián equivale al ángulo cuyo arco de circunferencia tiene una medida igual al radio.



$$\overline{OA} = \overline{AB} \Rightarrow a = 1 \text{ radián}$$

Nota: Como el perímetro de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ y abarca un giro completo, o sea un ángulo de 360° , entonces 360° equivale a 2π radianes.

| | | | | | | | |
|----------|------|------|-----|-----|-----|-----|----|
| Grados | 360° | 180° | 90° | 60° | 45° | 30° | 0° |
| Radianes | 2π | π | π/2 | π/3 | π/4 | π/6 | 0 |

Equivalencia entre Sistemas de Medición:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 1^\circ = 2\pi / 360$$

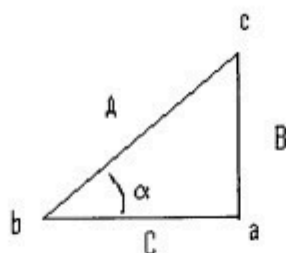
$$1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi \Rightarrow 1 \text{ rad} = 180^\circ / \pi \approx 57,3^\circ$$

$$1^\circ \cong 0,0175 \text{ radianes}$$

$$1 \text{ rad} \cong 57,3^\circ$$

Razones Trigonómicas

Dado un triángulo rectángulo:



- A : hipotenusa
 â. ángulo recto
 B: cateto opuesto a α
 C: cateto adyacente a α

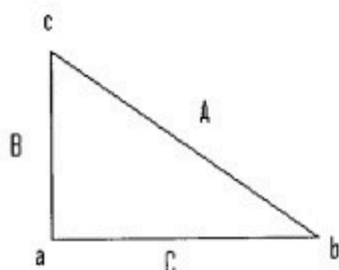
Las razones (divisiones) entre pares de lados de un triángulo rectángulo se mantienen constantes, mientras el ángulo es constante, y varían al variar el ángulo. Es decir, estas razones dependen del ángulo y no de los lados. Cada una de las 6 razones consideradas es un número que recibe un nombre especial:

- 1) $\frac{B}{A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{seno de } \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{B}{A}$
- 2) $\frac{C}{A} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{coseno de } \alpha \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{C}{A}$
- 3) $\frac{B}{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \text{tangente de } \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{B}{C}$
- 4) $\frac{C}{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \text{cotangente de } \alpha \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{C}{B}$
- 5) $\frac{A}{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \text{secante de } \alpha \Rightarrow \text{sec } \alpha = \frac{A}{C}$
- 6) $\frac{A}{B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \text{cosecante de } \alpha \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{A}{B}$

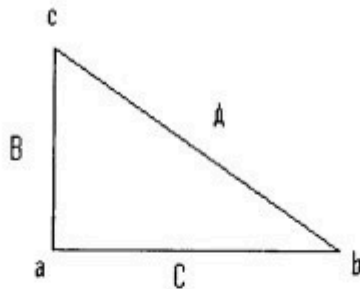
Resolución de Triángulos Rectángulos: Dado un triángulo rectángulo del que se conocen algunos elementos, se pueden averiguar los restantes elementos utilizando las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y la propiedad que dice que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180° .

Teorema de Pitágoras: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

$$A^2 = B^2 + C^2$$



Ejemplo: Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4, calcule todos sus lados y ángulos.



Datos: $B = 3$, $C = 4$ $\hat{a} = 90^\circ$

Incógnitas: A y los otros ángulos

Resolución: Por Pitágoras $A = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \Rightarrow A = 5$

$$\text{sen } b = \frac{B}{A} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow b = 36,8^\circ$$

$$a + b + c = 180^\circ \Rightarrow c = 180^\circ - 90^\circ - 36,8^\circ \Rightarrow c = 53,2^\circ$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

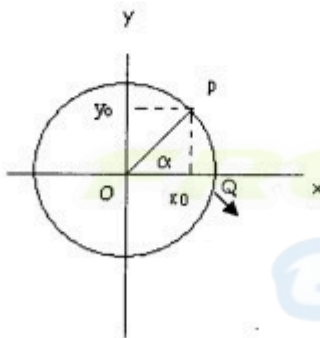
Se llaman funciones trigonométricas a las funciones de la forma:

$$y = \text{sen } x, \quad y = \text{cos } x, \quad y = \text{tg } x, \quad y = \text{cotg } x, \quad y = \text{sec } x, \quad y = \text{cosec } x$$

Las razones trigonométricas definidas para ángulos agudos, pueden extenderse a todo tipo de ángulo.

Consideremos los ángulos en un círculo de radio 1 y centro en el origen de coordenadas, llamado “**círculo trigonométrico**”

Un ángulo agudo α determina en el círculo trigonométrico un triángulo rectángulo OPQ, cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas: $O = (0,0)$ $P = (x_0, y_0)$ $Q = (x_0, 0)$ y el radio $r = OP = 1$



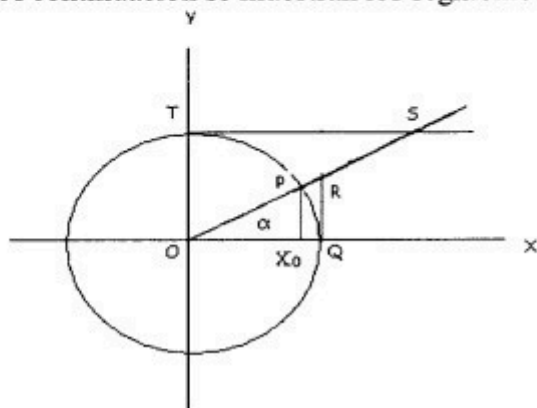
$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{1} = y_0 \Rightarrow \text{sen } \alpha = y_0$$

$$\Rightarrow P = (\text{cos } \alpha, \text{sen } \alpha)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{1} = x_0 \Rightarrow \text{cos } \alpha = x_0$$

Gráficamente el segmento Px_0 es el segmento asociado al seno del ángulo α y el segmento Ox_0 es el segmento asociado al coseno de α .

A continuación se muestran los segmentos asociados a todas las funciones trigonométricas:



Por Q se traza QR (perpendicular al eje x), de manera que el triángulo OPX_0 es semejante al triángulo ORQ , entonces sus lados son proporcionales: $\frac{PX_0}{OX_0} = \frac{RQ}{OQ}$

Como $OQ = 1$ y $\frac{PX_0}{OX_0} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \mathbf{tg \alpha = RQ}$

Además $\frac{OP}{OX_0} = \frac{OR}{OQ}$, pero $OQ = 1$ y $\frac{OP}{OX_0} = \operatorname{sec} \alpha \Rightarrow \mathbf{sec \alpha = OR}$

Se traza por T una paralela al eje x, de manera que el triángulo OTS es semejante a OX_0P entonces sus lados son proporcionales: $\frac{OX_0}{X_0P} = \frac{TS}{OT}$

Como $OT = 1$ y $\frac{OX_0}{X_0P} = \operatorname{cotg} \alpha \Rightarrow \mathbf{cotg \alpha = TS}$

Además $\frac{OP}{PX_0} = \frac{OS}{TO}$ pero $TO = 1$ y $\frac{OP}{PX_0} = \operatorname{cosec} \alpha \Rightarrow \mathbf{cosec \alpha = OS}$

De la misma manera se puede extender la definición de función trigonométrica a cualquier ángulo (ubicado en cualquiera de los 4 cuadrantes).

Hemos visto que el seno de un ángulo está asociado a un segmento vertical (ordenada) y el coseno a un segmento horizontal (abscisa) por lo cual queda definido un signo para estas funciones trigonométricas según el cuadrante al que pertenece el ángulo.

Signo de las Funciones Trigonómicas en cada cuadrante

| Funciones | Cuadrantes | | | |
|-----------|------------|----|----|----|
| | 1° | 2° | 3° | 4° |
| Seno | + | + | - | - |
| Coseno | + | - | - | + |
| Tangente | + | - | + | - |

| Funciones | Cuadrantes | | | |
|------------|------------|----|----|----|
| | 1° | 2° | 3° | 4° |
| Cotangente | + | - | + | - |
| Secante | + | - | - | + |
| Cosecante | + | + | - | - |

Identidad Trigonométrica: es una igualdad que involucra funciones trigonométricas que se cumple para todo valor de la variable (siempre que esté definida la operación)

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cog} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cog} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

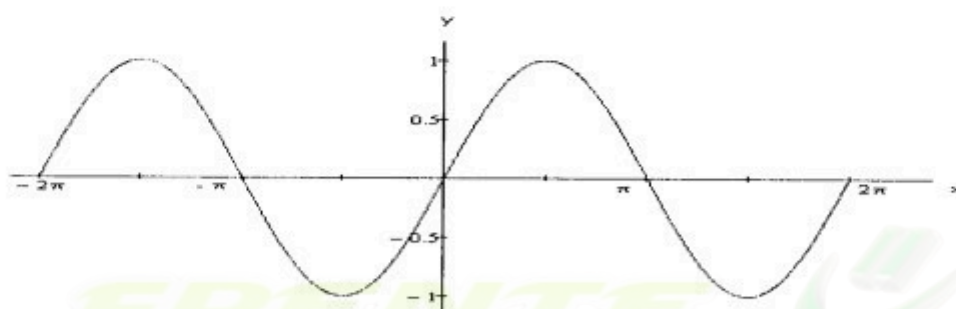
$$1 + \operatorname{cog}^2 \alpha + 1 = \operatorname{csc}^2 \alpha$$

Gráficas de las Funciones Trigonométricas:

1) $y = f(x) = \operatorname{sen} x$

Dominio de f : \mathbb{R}

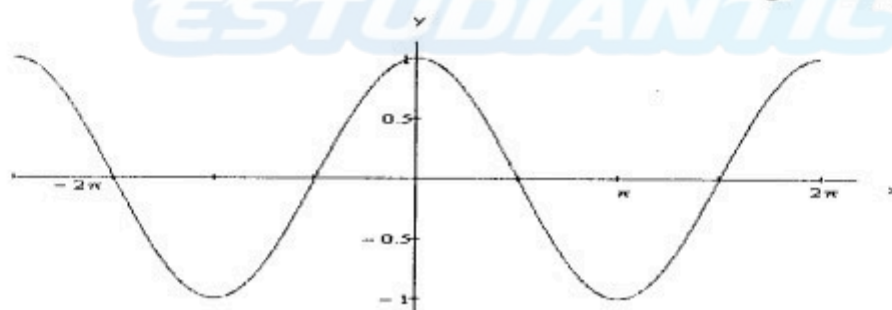
Imagen de f : $[-1,1]$



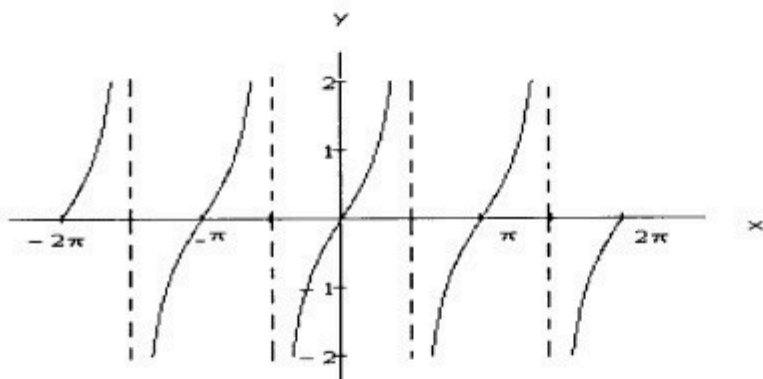
2) $y = f(x) = \operatorname{cos} x$

Dominio de f : \mathbb{R}

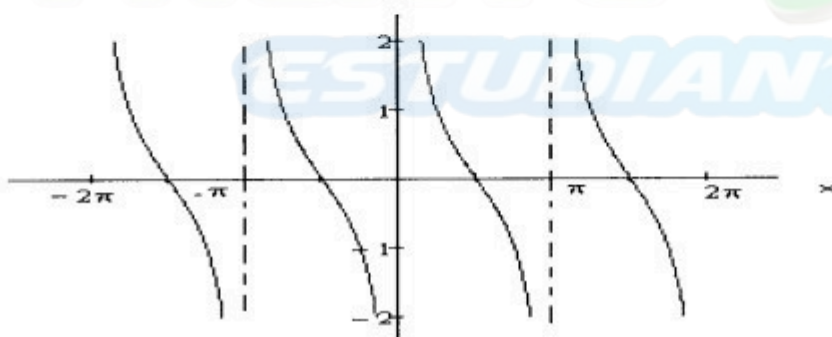
Imagen de f : $[-1,1]$



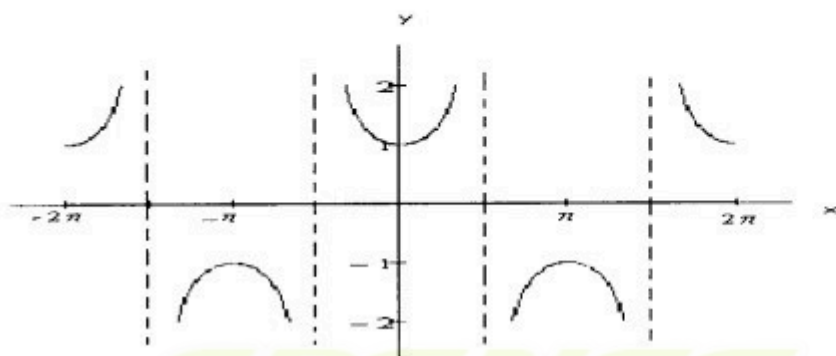
3) $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ Dominio = $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ Imagen = \mathbb{R}



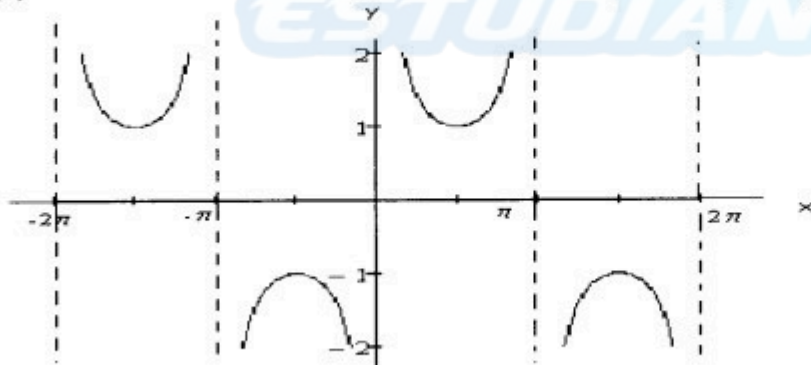
4) $y = f(x) = \operatorname{cotg} x$ Dominio = $\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ Imagen = \mathbb{R}



5) $y = f(x) = \operatorname{sec} x$ Dominio = $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ Imagen = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



6) $y = f(x) = \operatorname{cosec} x$ Dominio = $\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ Imagen = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Valores de las Funciones Trigonómicas de Ángulos Notables

| ángulo | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|
| seno | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| coseno | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tangente | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | \exists |

Funciones Trigonómicas de Ángulos Complementarios: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta = \text{cos} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{coseca} = \text{secs } \beta = \text{sec} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{seca} = \text{cosec } \beta = \text{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{tga} = \text{cotg } \beta = \text{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{cotga} = \text{tg } \beta = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Funciones Trigonómicas de Ángulos Suplementarios: $\alpha + \beta = 180^\circ$

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen}(\pi - \alpha) \quad \text{coseca} = \text{cosec } \beta = \text{cosec}(\pi - \alpha)$$

$$\text{cos } \alpha = -\text{cos } \beta = -\text{cos}(\pi - \alpha) \quad \text{seca} = -\text{sec } \beta = -\text{sec}(\pi - \alpha)$$

$$\text{tga} = -\text{tg } \beta = -\text{tg}(\pi - \alpha) \quad \text{ctga} = -\text{ctg } \beta = -\text{ctg}(\pi - \alpha)$$

Funciones Trigonómicas de Ángulos Opuestos: $\beta = -\alpha$

$$\text{sen } \alpha = -\text{sen } \beta = -\text{sen}(-\alpha) \quad \text{coseca} = -\text{cosec } \beta = -\text{cosec}(-\alpha)$$

$$\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta = \text{cos}(-\alpha) \quad \text{seca} = \text{sec } \beta = \text{sec}(-\alpha)$$

$$\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta = -\text{tg}(-\alpha) \quad \text{ctga} = -\text{ctg } \beta = -\text{ctg}(-\alpha)$$

Funciones Trigonómicas de la Suma o Diferencia de dos Ángulos:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta \pm \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

Funciones Trigonómicas del Ángulo Doble:

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos}(2\alpha) = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos:

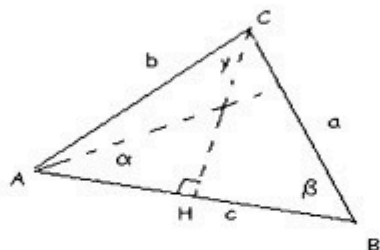
Un triángulo oblicuángulo es un triángulo que no tiene un ángulo recto.

Resolver un triángulo oblicuángulo es hallar el valor de todos sus lados y ángulos.

Dado un triángulo oblicuángulo del que se conocen algunos elementos, se puede averiguar los restantes elementos utilizando el Teorema del Seno, el Teorema del Coseno y la propiedad que dice que la suma de ángulos interiores del triángulo es 180° .

Teorema del Seno: “Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$



Teorema del Coseno: “El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo comprendido”

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Recomendaciones:

- Si se conocen 2 ángulos y un lado → usar Teorema del Seno
- Si se conocen 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos → usar Teorema del Seno
- Si se conocen 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos → usar Teorema del Coseno
- Si se conocen los tres lados → usar Teorema del Coseno

Ejemplo: En un triángulo se conocen los lados $b = 3 \text{ cm}$ y $c = 4 \text{ cm}$ y el ángulo comprendido es $\alpha = 60^\circ$. Hallar el lado y los ángulos restantes.

Aplicando Teorema del Coseno → $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$$

Ahora se puede aplicar el Teorema del Seno

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{\text{sen}60^\circ} = \frac{3}{\text{sen}\beta}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\text{sen}\beta} \Rightarrow \text{sen}\beta = 0,72057 \Rightarrow \beta = 46^\circ 6'$$

Aplicando suma de ángulos interiores del triángulo → $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$60^\circ + 46,1^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 73,89^\circ$$

ECUACIONES TRIGONÓMICAS

Son aquellas ecuaciones en las que la variable figura como ángulo de funciones trigonométricas. Para resolverlas es conveniente dejarla expresada en una sola función trigonométrica y luego se la resuelve como una ecuación algebraica.

Ejemplos:

1) $2 \text{sen } x = 1 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Soluciones: $x = \pi/6 \pm 2n\pi$ y $x = 5\pi/6 \pm 2n\pi$

$$\begin{aligned}
 2) 3 + 3 \cos x = 2 \sin^2 x &\Rightarrow 3 + 3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x) \Rightarrow 3 + 3 \cos x = 2 - 2 \cos^2 x \\
 &\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{se llama } \cos x = z \\
 &\Rightarrow 2z^2 + 3z + 1 = 0 \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad z_2 = -1$$

$$\cos x = -1/2 \Rightarrow \text{Soluciones: } x = 2\pi/3 \pm 2n\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \text{Soluciones: } x = \pi \pm 2n\pi$$



UNIDAD VI

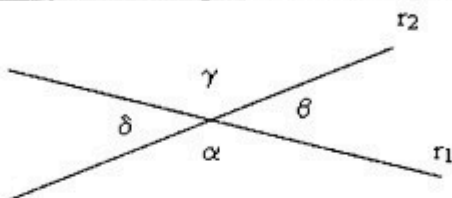
Geometría

ÁNGULO

Ángulos Complementarios: Se define como ángulos complementarios a dos ángulos cuya suma sea igual a un ángulo recto (90°).

Ángulos Suplementarios: Se define como ángulos suplementarios a dos ángulos cuya suma sea igual a un ángulo llano (180°).

Ángulos formados por dos rectas que se cortan:



Ángulos Adyacentes: Dos ángulos son adyacentes cuando tienen un lado en común y los otros lados son semirrectas opuestas.

Propiedad: “Dos ángulos adyacentes son suplementarios”

Ejemplos:

- α y β son adyacentes
- α y δ son adyacentes
- β y γ son adyacentes
- γ y δ son adyacentes

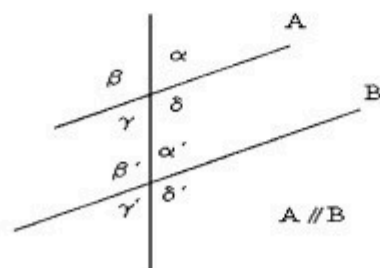
Ángulos Opuestos por el vértice: Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

Propiedad: “Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes”

Ejemplos:

- α y γ son opuestos por el vértice
- β y δ son opuestos por el vértice

Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante



Ángulos Interiores: $\gamma, \delta, \beta', \alpha'$

Ángulos Exteriores: $\alpha, \beta, \gamma', \delta'$

Ángulos Alternos Internos: γ y α' son alternos internos
 δ y β' son alternos internos

Propiedad: “Los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes”

Ángulos Alternos Externos: α y γ' son alternos externos
 β y δ' son alternos externos

Propiedad: "Los ángulos alternos externos entre paralelas son congruentes"

Ángulos Correspondientes: α y α' son correspondientes
 β y β' son correspondientes
 δ y δ' son correspondientes
 γ y γ' son correspondientes

Propiedad: "Los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes"

Ángulos Conjugados Internos: δ y α' son conjugados internos
 γ y β' son conjugados internos

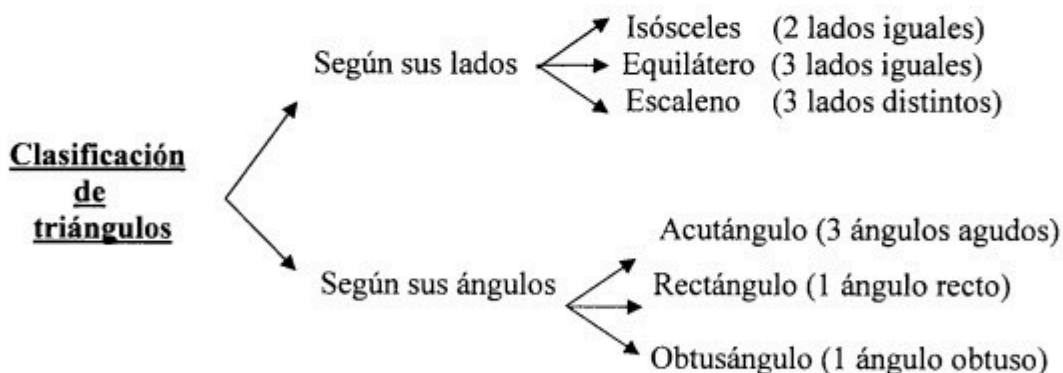
Propiedad: "Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios"

Ángulos Conjugados Externos: α y δ' son conjugados externos
 β y γ' son conjugados externos

Propiedad: "Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios"

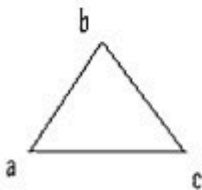
TRIÁNGULO

Definición: Triángulo es una porción de superficie plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos, es decir que un triángulo es un polígono convexo de tres lados y tres ángulos



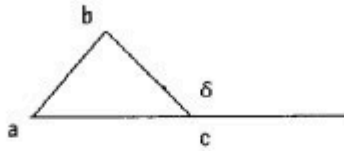
Propiedad Triangular: "En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos lados"

Propiedad 1: "En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a 180° "



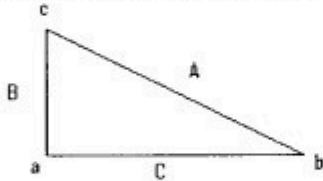
$$a + b + c = 180^\circ$$

Propiedad 2: "En todo triángulo cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él"



$$a + b = \delta$$

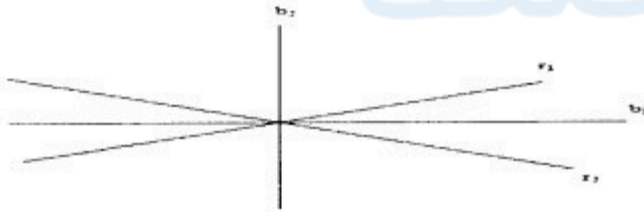
Teorema de Pitágoras: “En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”



$$A^2 = B^2 + C^2$$

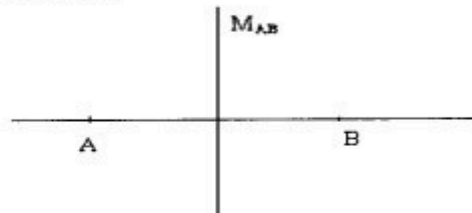
Recordar:

Bisectriz: Dadas dos rectas r_1 y r_2 se define como bisectriz al conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$, que equidistan de ambas rectas, es decir distancia de P a recta r_1 es igual a la distancia de P a la recta r_2



Es decir que para un par de rectas que se cortan existen dos rectas bisectrices b_1 y b_2 , perpendiculares entre ellas y que dividen al ángulo en dos ángulos congruentes.

Mediatriz: Dados dos puntos A y B se define como mediatriz al conjunto de puntos que equidistan de A y de B . Es una recta que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular al segmento AB



POLÍGONOS

Polígono Convexo: es una figura plana y cerrada por tres o más segmentos de línea unidos en sus extremos.

Los polígonos convexos reciben distintos nombres según el número de lados:

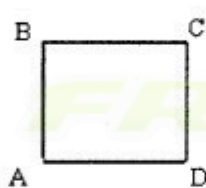
- 3 lados → triángulo
- 4 lados → cuadrilátero
- 5 lados → pentágono
- 6 lados → hexágono
- 7 lados → heptágono
- 8 lados → octógono

- 9 lados → eneágono
- 10 lados → decágono
- 11 lados → undecágonos
- 12 lados → dodecágono

Cuando el polígono tiene un número n de lados, mayor a 12, se dice polígono de n lados. Por ejemplo polígono de 17 lados.

Polígono Regular: Un polígono convexo se dice regular cuando tiene todos sus lados y sus ángulos respectivamente iguales.

Ejemplos:



$$AB = BC = CD = AD$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$$



$$PQ = QR = PR$$

$$\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R}$$

Perímetro de un Polígono: Se llama perímetro de un polígono a la suma de todos sus lados. Si el polígono es regular el perímetro se calcula como: $P = n.L$, donde n es el número de lados y L la medida de cada lado.

Ejemplos:

- para un triángulo isósceles el perímetro es $P = 2.L_1 + L_2$, siendo L_1 la medida de los dos lados iguales y L_2 la medida del tercer lado.
- para un triángulo equilátero el perímetro es: $P = 3.L$ (por ser polígono regular)
- para un triángulo escaleno el perímetro es $P = L_1 + L_2 + L_3$, siendo L_1, L_2, L_3 la medida de sus lados.

Suma de los Ángulos Interiores de un Polígono:

La suma de ángulos interiores de un polígono es igual a 2 rectos por el número de lados menos dos

$$\text{Suma ángulos interiores} = 2 R (n - 2)$$

Ejemplo: Calcular la suma de los ángulos interiores de un octógono:

$$n = 8 \Rightarrow 2 R (8 - 2) = 12 R = 12 \cdot 90^\circ = 1080^\circ$$

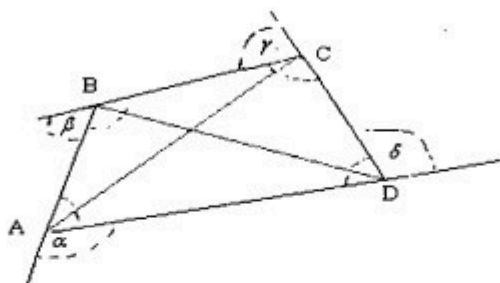
Suma de los Ángulos Exteriores de un Polígono:

La suma de ángulos exteriores de un polígono es igual a 4 rectos

$$\text{Suma ángulos exteriores} = 4 R$$

Cuadriláteros

Los polígonos de cuatro lados, llamados cuadriláteros, tienen los siguientes elementos: 4 vértices, 4 lados, 4 ángulos interiores, 4 ángulos exteriores, 2 diagonales.



A, B, C, D : vértices $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$: lados

$\hat{A}\hat{B}C, \hat{B}\hat{C}D, \hat{C}\hat{D}A, \hat{D}\hat{A}B$: ángulos interiores $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$: ángulos exteriores

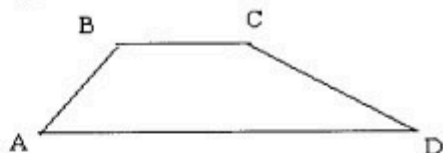
$\overline{AC}, \overline{BD}$: diagonales

Suma ángulos interiores = $2 R (n - 2) \rightarrow$ Suma ángulos interiores = $2 R (4 - 2)$

\rightarrow **Suma ángulos interiores = $4 R$**
Suma ángulos exteriores = $4 R$

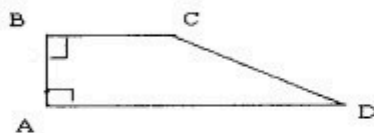
Clasificación de los Cuadriláteros. Propiedades.

1º) **Trapezio:** Se llama trapezio a todo cuadrilátero que tiene **por lo menos** un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman bases.



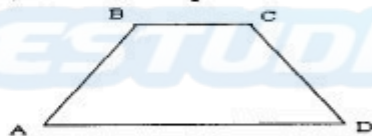
BC y AD son bases del trapezio

Todo trapezio que tiene dos ángulos rectos se llama **trapezio rectángulo**



$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, \overline{BC} paralelo \overline{AD}

- Todo trapezio cuyos ángulos adyacentes a las bases son congruentes, y los otros dos lados son congruentes, se llama **trapezio isósceles**.



$\hat{B} \cong \hat{C}$ (ángulos adyacentes al lado BC), $\hat{D} \cong \hat{A}$ (ángulos adyacentes al lado AD)

BC y AD son bases, $BA \cong CD$ (lados distintos de las bases)

2º) **Paralelogramo:** Se llama paralelogramo a todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

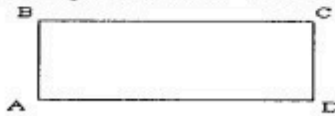
\overline{AB} paralelo a \overline{CD} y \overline{AD} paralelo a \overline{BC}



Nota: El paralelogramo es un trapecio particular en el que pueden considerarse como bases cualquiera de los lados paralelos.

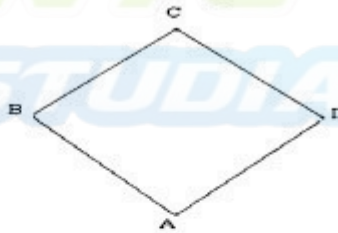
3º) **Rectángulo:** Se llama rectángulo a todo cuadrilátero que tiene sus ángulos rectos.

$$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} = 90^\circ$$



Nota: El rectángulo es paralelogramo y es trapecio rectángulo isósceles.

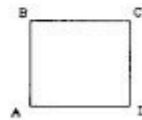
4º) **Rombo:** Se llama rombo a todo cuadrilátero que tiene sus lados congruentes.



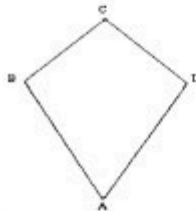
$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

5º) **Cuadrado:** Se llama cuadrado a todo cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos congruentes.

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA} \quad \hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} = 90^\circ$$



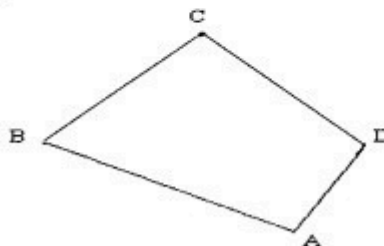
6º) **Romboide:** Se llama romboide a todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados congruentes.



$$\overline{AB} \cong \overline{DA} \text{ y } \overline{BC} \cong \overline{CD}$$

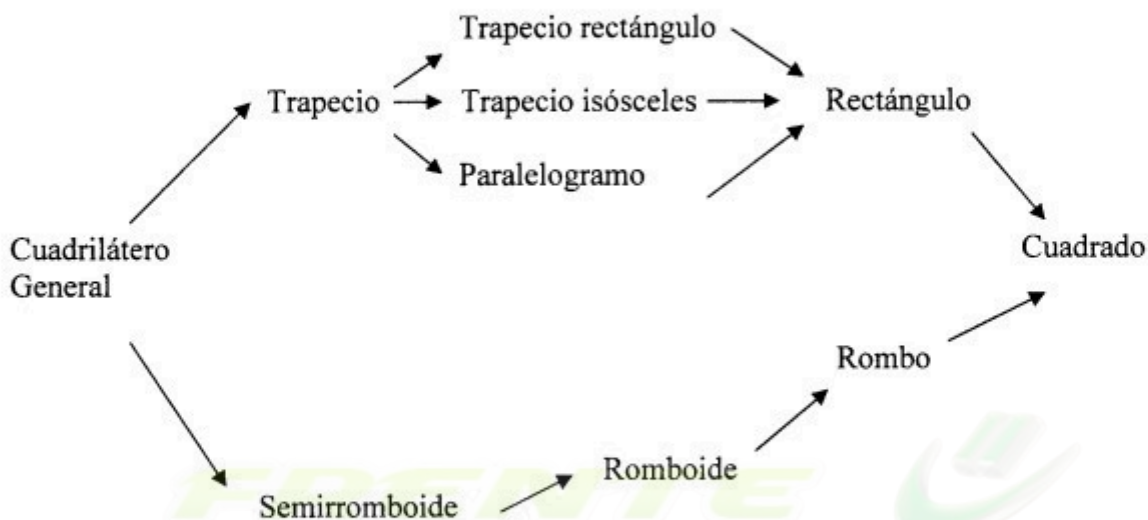
Nota: - Todo rombo es romboide
- Todo cuadrado es rombo y rectángulo

7º) **Semirromboide:** Se llama semirromboide a todo cuadrilátero que tiene un par de lados consecutivos congruentes.



$$\overline{BC} \cong \overline{CD}$$

Resumen:



Propiedades de las Diagonales:

- 1) En todo cuadrilátero convexo las diagonales se cortan en un punto interior al mismo.
- 2) Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.
- 3) Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, el paralelogramo es un rombo.
- 4) Si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de los pares de ángulos opuestos correspondientes, el paralelogramo es un rombo.
- 5) Si un cuadrilátero tiene diagonales perpendiculares y una corta a la otra en parte congruentes dicho cuadrilátero es un romboide.
- 6) La diagonal principal del romboide es bisectriz del par de ángulos opuestos correspondientes.
- 7) Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se cortan en el punto medio, dicho cuadrilátero es un rectángulo
- 8) Si las diagonales de un rectángulo son perpendiculares, dicho rectángulo es un cuadrado.
- 9) Si las diagonales de un rectángulo son bisectrices de los pares de ángulos opuestos correspondientes, dicho rectángulo es un cuadrado.

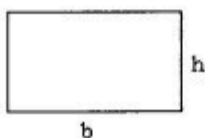
Área de Superficies Planas

Recordar: Los conceptos de superficie y área son distintos.

- Una superficie plana es una parte del plano, es un ente geométrico: es un conjunto de puntos.
- El área es una propiedad de la superficie. El área de una superficie es una cantidad, o sea un número real que varía de acuerdo a la unidad elegida.

Fórmulas para el cálculo de áreas de superficies planas

- 1) Área del Rectángulo: $b \times h$

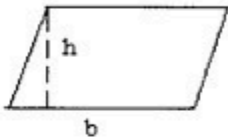


2) Área del Cuadrado: L^2

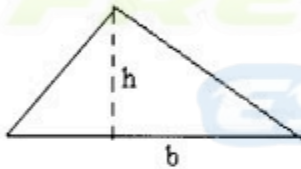


L

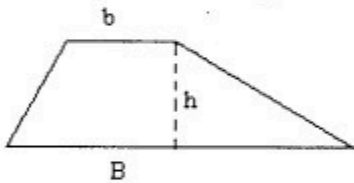
3) Área del Paralelogramo: $b \times h$



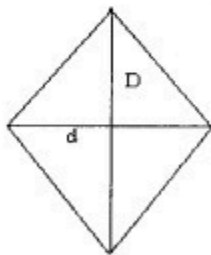
4) Área del Triángulo: $\frac{b \times h}{2}$



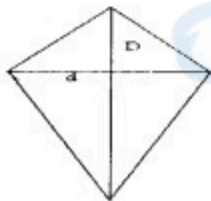
5) Área del Trapecio: $\frac{(B+b) \cdot h}{2}$



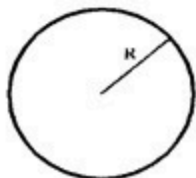
6) Área del Rombo: $\frac{D \times d}{2}$



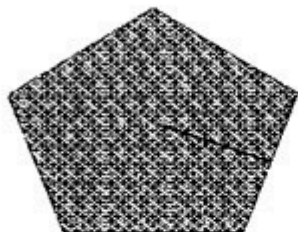
7) Área del Romboide: $\frac{D \times d}{2}$



8) Área del círculo: $\pi \cdot R^2$

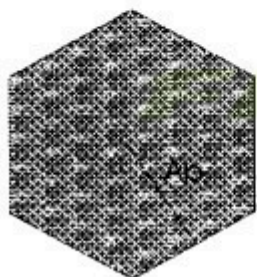


9) Área del Pentágono: **(perímetro x apotema) / 2**



El pentágono regular es un polígono de cinco lados iguales y cinco ángulos iguales. Apotema: segmento que une un centro con punto medio de cada lado.

10) Área del hexágono: **(perímetro x apotema) / 2**

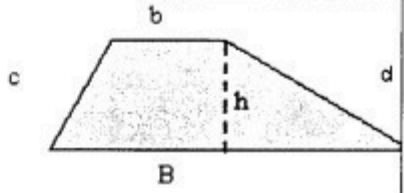
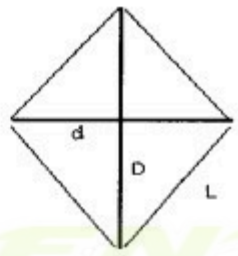
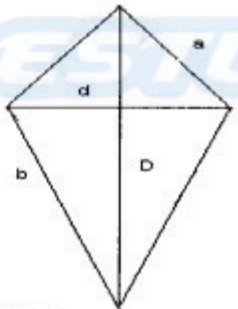
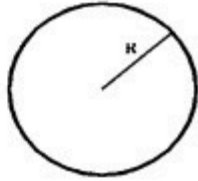




El hexágono regular es un polígono de seis lados iguales y seis ángulos iguales.

Los triángulos formados, al unir el centro con todos los vértices, son equiláteros.

Se resume, en el siguiente cuadro, perímetro y área de figuras planas

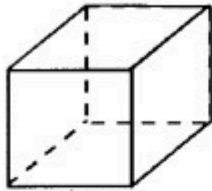
| Figura Plana | Forma | Perímetro | Área |
|---------------|-------|-----------------------------|---------------------------|
| Triángulo | | $P = AB + BC + CA$ | $A = \frac{b \cdot h}{2}$ |
| Rectángulo | | $P = 2 \cdot b + 2 \cdot h$ | $A = b \cdot h$ |
| Cuadrado | | $P = 4 \cdot L$ | $A = L^2$ |
| Paralelogramo | | $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ | $A = b \cdot h$ |

| Figura Plana | Forma | Perímetro | Área |
|-------------------|---|-----------------------------|---|
| Trapecio |  | $P = B + b + c + d$ | $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ |
| Rombo |  | $P = 4 \cdot L$ | $A = \frac{D \cdot d}{2}$ |
| Romboide |  | $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ | $A = \frac{D \cdot d}{2}$ |
| Círculo |  | $P = 2 \pi \cdot R$ | $A = \pi \cdot R^2$ |
| Pentágono regular |  | $P = 5 \cdot L$ | $A = \frac{\text{Perim.} \cdot \text{Apoten}}{2}$ |
| Hexágono regular |  | $P = 6 \cdot L$ | $A = \frac{\text{Perim.} \cdot \text{Apoten}}{2}$ |

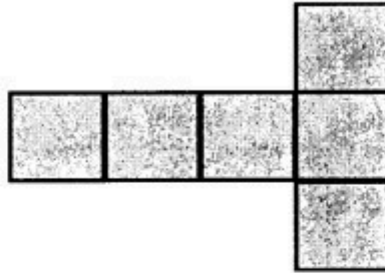
FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS

CUBO

DESARROLLO DEL CUBO



arista
arista = l



El cubo es un sólido limitado por seis cuadrados iguales, también se le conoce con el nombre de hexaedro

$$\text{Área lateral} = 4l^2$$

$$\text{Área total} = 6l^2$$

$$\text{Volumen del cubo} = l^3$$

PRISMAS

Volumen del prisma = área de la base x altura

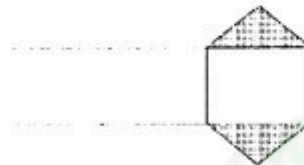
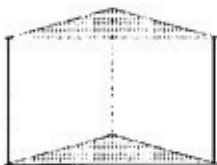
Área lateral = perímetro de la base x altura del prisma

Área total = área lateral + 2.área de la base

A continuación están dibujados los prismas triangular, cuadrangular y hexagonal.

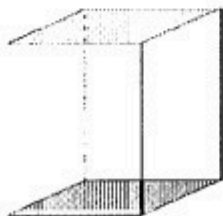
a) Prisma Triangular

DESARROLLO DEL PRISMA TRIANGULAR



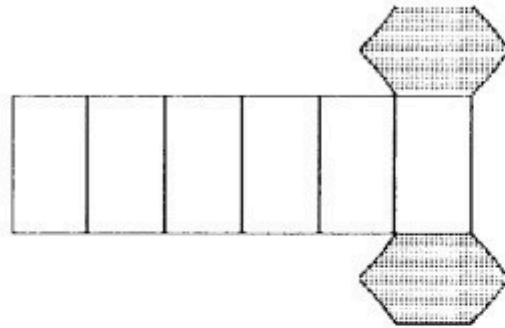
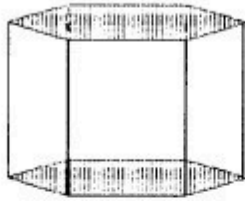
b) Prisma Cuadrangular

DESARROLLO DEL PRISMA CUADRANGULAR



c) Prisma Hexagonal

DESARROLLO DEL PRISMA HEXAGONAL



PIRÁMIDES

Pirámide regular es un sólido que tiene por base un polígono y cuyas caras son triángulos que se reúnen en un mismo punto llamado vértice.

Volumen de la pirámide = (área de la base x altura) / 3

Área lateral = (perímetro de la base x apotema) / 2

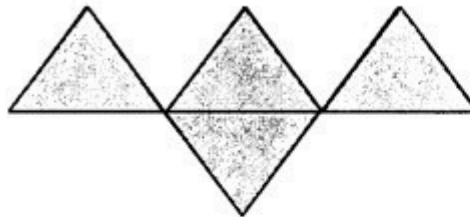
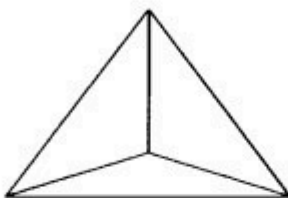
Área total = área lateral + área de la base

A continuación están dibujados el tetraedro, la pirámide triangular y la cuadrangular.

Tetraedro: es una pirámide formada por cuatro triángulos equiláteros. Cualquier cara, por tanto, puede ser la base.

TETRAEDRO

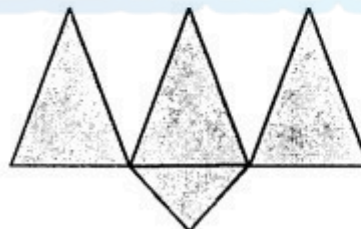
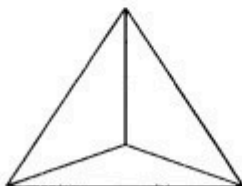
DESARROLLO DEL TETRAEDRO



Pirámide triangular: la base es un triángulo equilátero y las caras laterales son triángulos isósceles.

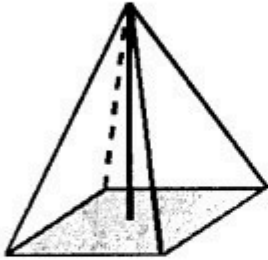
PIRÁMIDE

DESARROLLO DE LA PIRÁMIDE TRIANGULAR

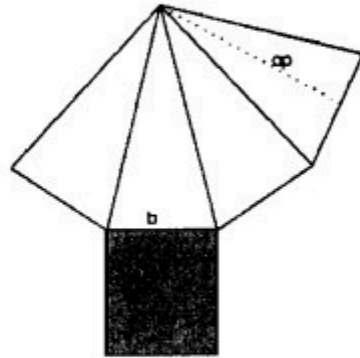


Pirámide cuadrangular: aquí la base es un cuadrado, teniendo cuatro caras laterales.

PIRÁMIDE CUADRANGULAR



DESARROLLO DE LA PIRÁMIDE CUADRANGULAR



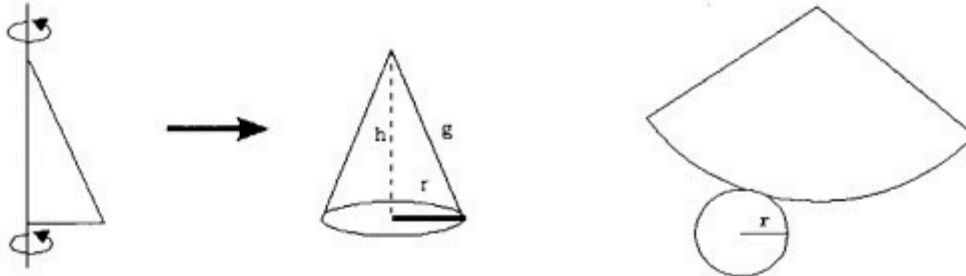
CONO

El cono es el sólido engendrado por un triángulo rectángulo al girar en torno a uno de sus catetos.

Volumen del cono = (área de la base x altura) / 3

CONO

DESARROLLO DEL CONO



Área lateral = $\pi \cdot r \cdot g$

Área total = área lateral + área de la base

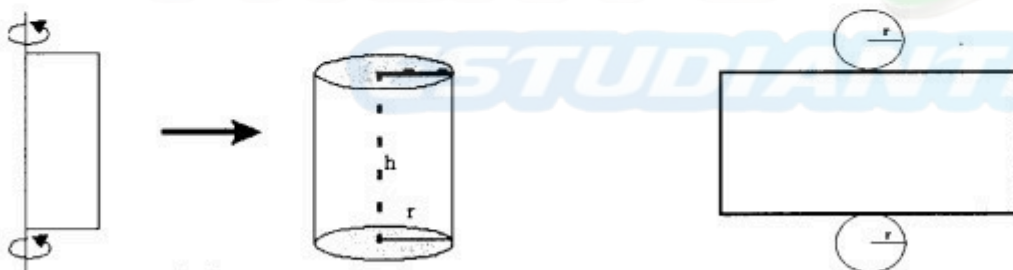
CILINDRO

El cilindro es el sólido engendrado por un rectángulo al girar en torno a uno de sus lados.

Volumen del cilindro = área de la base x altura

CILINDRO

DESARROLLO DEL CILINDRO

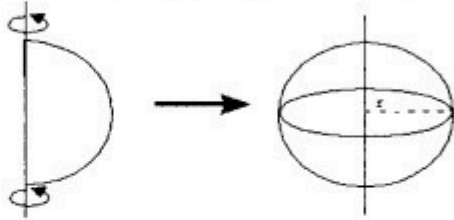


Área lateral = perímetro de la base x altura = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Área total = área lateral + 2.área de la base

ESFERA

La esfera es el sólido engendrado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.



$$\text{Área de la esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

FRENTE 
ESTUDIANTIL

FRENTE 
ESTUDIANTIL

BIBLIOGRAFÍA:

- Britton, Ben Kriegh, Rutland. 1970. Matemáticas Universitarias. Vol I y II. CECSA
- Cortés, G., Gómez, N. 1986. Matemática 1. Ed. Kapelusz
- Oteyza de Oteyza, Elena y Otros. Trigonometría y Geometría Analítica. Prentice-Hall
- Repetto, Linskens, Fesquet. 1975. Geometría 2. Ed. Kapelusz
- Swokowski, Earl. 1981. Álgebra Universitaria. CECSA.
- Tapia. "Matemática I". 1976. Ed. Estrada
- Tapia. "Matemática II". 1976. Ed. Estrada
- Tapia. "Matemática III". 1976. Ed. Estrada
- Tapia. "Matemática IV". 1976. Ed. Estrada
- Apuntes de la Cátedra de Álgebra Lineal y Geometría Analítica sobre Polinomios. CEI
- Alurralde, F. 1995. 1996. Cartilla de Matemática de Jornadas de Apoyo Académico Ingreso Facultad de Ingeniería. C.E.I
- Berejnoi, C. 2005. Cartilla de Matemática del Curso de Apoyo y Nivelación. C.E.I.
- Alurralde, F. 2008. Cartilla de Matemática del Curso de Apoyo y Nivelación C.E.I.
- Copa, B. 2009. 2010. Cartilla de Matemática del Curso de Apoyo y Nivelación. C.E.I.

